

Современный
Гуманитарный
Университет

Дистанционное образование

0660.03.01;1

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество срета

Факультет с 9⁰⁰ мех. ан. 1 пар.

Номер контракта срета прак. ил.

чейберз

15⁰⁰ физика

16³⁰ физика

пятиклетка

информатика

инф-ка

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ЮНИТА 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$y = e^{Ax} (C_1 + C_2 x)$ общее
решение
 $z = A \cos x + B \sin x$ част. р.

Москва 2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН	4
ЛИТЕРАТУРА	5
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ	6
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР	11
1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений	11
2. Дифференциальные уравнения первого порядка, приводящиеся к квадратурам	18
2.1. Дифференциальное уравнение с разделенными переменными	21
2.2. Уравнения с разделяющимися переменными	24
2.3. Однородное уравнение первого порядка	31
2.4. Уравнения, приводящиеся к однородным	35
2.5. Уравнение Бернулли	37
2.6. Линейное уравнение первого порядка	41
2.7. Уравнение в полных дифференциалах	42
2.8. Уравнения Клеро и Лагранжа	44
3. Дифференциальные уравнения порядка выше первого ...	48
4. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка ...	54
5. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	64
6. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами	71
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	78
ТРЕНИНГ УМЕНИЙ	87
ФАЙЛ МАТЕРИАЛОВ	102
ГЛОССАРИЙ*	

* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Основные понятия теории дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения первого порядка, приводящиеся к квадратурам. Уравнение с разделенными переменными. Уравнение с разделяющимися переменными. Однородное уравнение. Уравнение, приводящееся к однородному. Уравнение Бернулли. Уравнения в полных дифференциалах. Уравнения Клеро и Лагранжа.

Дифференциальные уравнения порядка выше первого.

Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка. Однородные уравнения. Неоднородные уравнения.

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами n -го порядка. Однородные уравнения. Неоднородные уравнения.

Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

Базовая

*1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1, 2. М., 1978.

или

*2. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для ВТУЗов. М., 1969.

Дополнительная

3. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М., 1969.

4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М., 1981.

5. Понтрягин Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения (знакомство с высшей математикой). М., 1988.

6. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1983.

7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1970.

8. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., 1979.

9. Краснов М.Л., Кисилев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., 1978.

ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умение	Алгоритмы
1	2	3
1.	Решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными	1. Записать уравнение в виде $p_1(t)p_2(x)dt + q_1(t)q_2(x)dx = 0$ и зафиксировать функции $p_1(t)$, $p_2(x)$, $q_1(t)$, $q_2(x)$ 2. Найти решения t_0; x_0 уравнений $q_1(t) = 0$ и $p_2(x) = 0$ 3. Зафиксировать решения уравнения вида $t = t_0$ и $x = x_0$ 4. Разделить переменные в областях, где $q_1(t) p_2(x) \neq 0$, записав уравнение в виде $\frac{p_1(t)}{q_1(t)} dt + \frac{q_2(x)}{p_2(x)} dx = 0$ 5. Найти первообразные $P(t)$ для $\frac{p_1(t)}{q_1(t)}$ и $Q(x)$ для $\frac{q_2(x)}{p_2(x)}$ с помощью неопределенного интегрирования 6. Опустив C_1 и C_2, записать общий интеграл уравнения в виде $\varphi(t, x) = P(t) + Q(x) = C$ в областях, где $q_1(t)p_2(x) \neq 0$ 7. Выяснить, не входят ли в общий интеграл при каких-то значениях C ранее найденные решения вида $t = t_0$ и $x = x_0$ 8. Выписать все решения исходного дифференциального уравнения
2	Решение однородного дифференциального уравнения первого порядка	1. Записать уравнение в виде $\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right)$, зафиксировать функцию $f(u)$ 2. Сделать в уравнении замену $x = t \cdot u$ и переписать его в виде $t \frac{du}{dt} = f(u) - u$ 3. Решить уравнение $f(u) - u = 0$ и для каждого его решения u_0 зафиксировать решение исходного дифференциального уравнения вида $x = u_0 \cdot t$

1	2	3
		4. В областях $t(f(u) - u) \neq 0$ привести уравнение $t \frac{du}{dt} = f(u) - u$ к виду уравнения с разделенными переменными $\frac{1}{t} dt + \frac{1}{-f(u) + u} du = 0$ 5. Найти первообразную $\Phi(u)$ для функции $\frac{1}{-f(u) + u}$ с помощью неопределенного интегрирования 6. Записать общий интеграл дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right)$ в виде $\ln Ct + \Phi\left(\frac{x}{C}\right) = 0$, опустив C' 7. Выяснить, не входят ли в общий интеграл при каких-то значениях C решения вида $x = u_0 \cdot t$, найденные ранее 8. Выписать все решения исходного дифференциального уравнения
3	Решение уравнения Бернулли	1. Записать уравнение в виде $\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)x^\alpha$ и зафиксировать функции $P(t)$, $Q(t)$ и число $\alpha \neq 1$ 2. Сделать в уравнении замену $x = u \cdot v$ и записать его в виде $v \frac{du}{dt} + u \left(\frac{dv}{dt} + P(t)v \right) = Q(t)(uv)^\alpha$ 3. Записать уравнение для v $\frac{dv}{dt} + P(t)v = 0$ 4. Разделив переменные в уравнении для v, решить его, взяв постоянную в общем решении, равную нулю 5. Записать уравнение для u в виде $\frac{du}{dt} = Q(t)(uv)^{\alpha} \cdot v^{-1}$ и провести преобразования в правой его части

1	2	3
		6. Разделить переменные в уравнении для u 7. В случае $\alpha > 0$ зафиксировать решение $x = 0$ исходного уравнения 8. Решить уравнение с разделенными переменными t, u 9. Проведя алгебраические преобразования, найти явное выражение для u 10. Найти общее решение для x , перемножив найденные выражения для u, v 11. Выписать все решения исходного дифференциального уравнения
4	Решение уравнения с полным дифференциалом	1. Записать уравнение в виде $P(t,x)dt + Q(t,x)dx = 0$ и зафиксировать функции $P(t,x)$ и $Q(t,x)$ 2. Проверить выполнение условия $P'_x(t,x) = Q'_t(t,x)$, что гарантирует принадлежность дифференциального уравнения классу уравнений с полным дифференциалом 3. Найти $u(t, x)$ как первообразную от $P(t, x)$ по переменной t , считая постоянной функцией от x $u(t,x) = \int P(t,x)dt + C(x)$ 4. Найти производную от найденной функции $u(t, x)$ по переменной x и приравнять ее $Q(t, x)$ $u_x'(t, x) = (\int P(t,x)dt)'_x + C'(x) = Q(t, x)$ 5. Найти из полученного равенства $C'(x) = Q(t, x) - (\int P(t,x)dt)'_x$ 6. Найти $C(x)$ как первообразную от $C'(x)$, взяв постоянную в неопределенном интеграле равной нулю $C(x) = \int C'(x)dx + 0$ 7. Подставить найденную функцию $C(x)$ в выражение $u(t, x)$ из третьего шага алгоритма $u(t,x) = \int P(t,x)dt + C(x)$ 8. Записать общий интеграл уравнения $P(t, x)dt + Q(t, x)dx = 0$ в виде $u(t, x) = C$

1	2	3
5	Решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и квазимногочленом в правой части	1. Записать уравнение в виде $a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = e^{\mu t} ((A_0 t^k +$ $+ A_1 t^{k-1} + \dots + A_k) \cos vt + (B_0 t^l + B_1 t^{l-1} +$ $+ \dots B_l) \sin vt)$ и зафиксировать значения постоянных $a_0, a_1, a_2, \mu, v, k, l, A_0, A_1, \dots, A_k, B_0, B_1, \dots, B_l$ 2. Записать характеристическое уравнение $a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$ 3. Записать корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0};$ $\lambda_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}, \text{ если дискри-}$ минант $D = a_1^2 - 4a_0 a_2 \geq 0$, и числа $\alpha = -\frac{a_1}{2a_0}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4a_0 a_1 - a_1^2}}{2a_0}, \text{ если}$ дискриминант $D = a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0$ 4. Найти число $N = \max\{k; l\}$ 5. Найти число S по формуле $s = 0, \text{ если } (a_0(\mu^2 - v^2) + a_1\mu + a_2)^2 +$ $+ v^2(2a_0\mu + a_1)^2 > 0,$ $s = 1, \text{ если } v = 0, \mu = \lambda_1 \text{ или } \mu = \lambda_2 \text{ и } D = a_1^2 - 4a_0 a_2 > 0;$ $s = 1, \text{ если } v > 0 \text{ и}$ $(a_0(\mu^2 - v^2) + a_1\mu + a_2)^2 +$ $+ v^2(2a_0\mu + a_1)^2 = 0,$ $s = 2, \text{ если } v = 0, D = a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0,$ $\mu = -\frac{a_1}{2a_0}, \text{ для чего подсчитать число}$ $(a_0(\mu^2 - v^2) + a_1\mu + a_2)^2 + v^2(2a_0\mu + a_1)^2$

1	2	3
		6. Записать частное решение $\Psi^*(t) = e^{\mu t} t^s \cdot ((C_0 t^N + C_1 t^{N-1} + \dots + C_N) \cdot \cos \nu t + (D_0 t^N + D_1 t^{N-1} + \dots + D_N) \sin \nu t)$ с неопределенными коэффициентами $C_0, C_1, \dots, C_N, D_0, D_1, \dots, D_N$, причем $D_0 = D_1 = \dots = D_N = 0$, если $\nu = 0$ 7. Вычислить $\Psi^{*'}(t), \Psi^{*''}(t)$ 8. Вычислить $a_0 \Psi^{*''}(t) + a_1 \Psi^{*'}(t) + a_2 \Psi^*(t)$, приведя подобные члены 9. Записать систему линейных уравнений для $C_0, C_1, \dots, C_N, D_0, D_1, \dots, D_N$, приравняв коэффициенты при подобных членах $a_0 \Psi^{*''}(t) + a_1 \Psi^{*'}(t) + a_2 \Psi^*(t)$ и $e^{\mu t} \cdot ((A_0 t^K + A_1 t^{K-1} + \dots + A_K) \cos \nu t + (B_0 t^K + B_1 t^{K-1} + \dots + B_K) \sin \nu t)$ 10. Найти $C_0, C_1, \dots, C_N, D_0, D_1, \dots, D_N$, решив систему из п. 9, и получить $\Psi^*(t)$ по п. 6 11. Записать общее решение исходного дифференциального уравнения в виде $\varphi(t) = \Psi^*(t) + \tilde{C}_1 e^{\lambda_1 t} + \tilde{C}_2 e^{\lambda_2 t}$ при $D^2 = a^2 - 4a_0 a_2 > 0$ (λ_1, λ_2 – из п. 3), $\varphi(t) = \Psi^*(t) + (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t) e^{\lambda_1 t}$, при $D=0$ и $\lambda_1 = \lambda_2$, $\varphi(t) = \Psi^*(t) + (\tilde{C}_1 \cos \beta t + \tilde{C}_2 \sin \beta t) e^{\alpha t}$ при $D < 0$ (α, β – из п. 3)

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Многие явления и процессы в различных областях знаний достаточно точно описываются моделями, использующими дифференциальные уравнения. В качестве примеров можно привести движение точечной массы под действием системы сил, динамику объема популяции, эффективность рекламы, протекание химических реакций и так далее.

Перейдем к определению основных понятий теории дифференциальных уравнений.

Дифференциальным уравнением (д.у.) называется уравнение, содержащее производные неизвестной функции.

Если неизвестная функция зависит только от одного переменного, то д.у. называется обыкновенным; если от нескольких переменных и производные, входящие в д.у. - частные, то **дифференциальным уравнением с частными производными**. Мы будем заниматься только обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Так как наиболее частым случаем является изучение тех или иных характеристик процессов, протекающих во времени, то независимую переменную в обыкновенном д.у. будем обозначать через t , а функцию - через x .

Рассмотрим ряд моделей, обсуждение которых будет проведено ниже.

Как следует из второго закона механики (Ньютона), движение точечной массы m под действием постоянной по направлению силы $F(t)$ происходит по прямой, параллельной направлению силы, по закону

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F(t)}{m}, \quad (1)$$

где $x = x(t)$ - положение точечной массы в момент времени t относительно выбранного начала O координат на прямой, по которой масса движется.

Второму закону механики можно придать вид, отличный от (1), который на самом деле и использовал Ньютон, а именно

$$\frac{d}{dt}(m \cdot v) = F(t), \quad (2)$$

где $v = \frac{dx}{dt}$ - скорость прямолинейного движения. Замечательно, что уравнение (2) подходит и для случая движения тела переменной массы $m = m(t)$ (ракета, например, на активном участке движения) и

* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

соответствует формулировке: изменение количества движения равно импульсу действующей силы.

Из сравнения форм записи (1) и (2) следует естественность следующего определения.

Наивысший порядок производной неизвестной функции, входящей в д.у., называется **порядком дифференциального уравнения**.

Следовательно, д.у. (1) - уравнение второго, а д.у. (2) - первого порядка.

Пусть $N = N(t)$ - объем популяции в момент времени t . По закону Мальтуса скорость изменения популяции пропорциональна ее объему, то есть

$$\frac{dN}{dt} = \alpha \cdot N, \quad (3)$$

где α - разность коэффициентов рождаемости и смертности.

В модели (3) делается допущение дробности объема популяции. При больших значениях N такое допущение вполне возможно.

Предположим, что в момент времени t о реализуемой продукции знают x покупателей из максимально возможного числа $x_m \geq x = x(t)$. Для ускорения сбыта были даны рекламные объявления. Информирование о продукции после этого происходит путем общения покупателей друг с другом. С определенной достоверностью можно считать, что скорость изменения числа знающих о продукции пропорциональна как этому числу, так и числу еще не знающих о ней. Согласно такому предположению

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x(x_m - x). \quad (4)$$

Как и в модели (3), считаем, что величина $x(t)$ в (4) может принимать не обязательно целые значения.

Одним из основных законов, регулирующих скорость течения химической реакции, является закон действующих масс: скорость химической реакции при постоянной температуре пропорциональна произведению концентраций веществ, участвующих в реакции в данный момент.

Пусть жидкие вещества А и В объемами a и b литров в процессе химической реакции образуют при постоянной температуре химическое вещество С так, что из объема α вещества А и объема β вещества В образуется объем $(\alpha + \beta)$ вещества С. Определим объем $x = x(t)$ вещества С в момент времени t . Очевидно, что в момент времени t прореагировало

вещество А в объеме $\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot x$ и вещество В в объеме $\frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot x$. Осталось

$(a - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot x)$ единиц объема вещества А и $(b - \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot x)$ вещества В. По закону действующих масс получим

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot \left(a - \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot x\right) \cdot \left(b - \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot x\right). \quad (5)$$

Разумеется, выражения в скобках в правой части (5) полагаются положительными.

Число моделей, использующих д.у., можно, разумеется, множить. Ограничимся приведенными.

Легко понять, что **общий вид д.у. первого порядка** есть

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0. \quad (6)$$

Однако уравнения (2) - (5) имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (7)$$

Подобные уравнения называются **разрешенными относительно производной** («старшей» производной).

Уравнение (1) - д.у. второго порядка, разрешенное относительно старшей - второго порядка - производной.

Простейшим случаем д.у. первого порядка, разрешенного относительно производной, является уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t). \quad (8)$$

Это известная задача восстановления функции по заданной производной, решаемая с помощью неопределенного интеграла [для непрерывной $f(t)$]

$$\int f(t) \cdot dt.$$

Таким образом, получаем, что в (8)

$$x = \Phi(t) + C, \quad (9)$$

где $\Phi(t)$ — произвольная первообразная для $f(t)$, то есть такая функция, что $\Phi'(t) = f(t)$. Это соображение приводит к следующему определению.

Функция $\varphi(t)$ является на интервале $(a; b)$ **решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка** (7), если на $(a; b)$ существует производная $\varphi'(t)$ и

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad (10)$$

для любого t из $(a; b)$, или если подстановка $x = \varphi(t)$ в (7) обращает это соотношение в тождество на интервале $(a; b)$.

Из (9) следует, что на одном и том же интервале уравнение (7) имеет, возможно, бесконечное множество решений.

Чтобы из множества решений (9) д.у. (8) выделить какое-либо фиксированное, достаточно потребовать, чтобы

$$x(t_0) = x|_{t=t_0} = x_0, \quad (11)$$

где значения $(t_0; x_0)$ считаются заданными.
Тогда по (9) и (11)

$$x_0 = \Phi(t_0) + C$$

и

$$x = x(t) = \Phi(t) - \Phi(t_0) + x_0. \quad (12)$$

Распространяя проделанное для д.у. (8) на общий случай д.у. (7), получаем так называемую **задачу Коши для д.у. первого порядка, разрешенного относительно производной**: найти определенную на некотором интервале $(a; b)$ функцию $\varphi(t)$, имеющую на $(a; b)$ производную $\varphi'(t)$ такую, что

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \text{ для всех } t \in (a; b)$$

и удовлетворяющую условию

$$\varphi(t_0) = x_0, \quad (13)$$

где $t_0 \in (a; b)$, а в точке (t_0, x_0) определена функция $f(t, x)$.

Значения t_0, x_0 при этом называются **начальными данными**, а условие (13) - **начальным условием**.

Итак, задача Коши для д.у. (7) состоит в нахождении решения этого д.у., удовлетворяющего заданному начальному условию (13).

Пример 1. Легко видеть, что совокупность всех решений д.у.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2} \cdot t^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

дается формулой

$$x = t^{\frac{3}{2}} + C, t \in (0; +\infty) = (a; b) \quad (15)$$

[частный случай д.у. (8)] и задача Коши при произвольных начальных данных $t_0 \in (0; +\infty)$, $x_0 \in (-\infty; +\infty)$ имеет единственное решение

$$\varphi(t) = t^{\frac{3}{2}} - t_0^{\frac{3}{2}} + x_0. \quad (16)$$

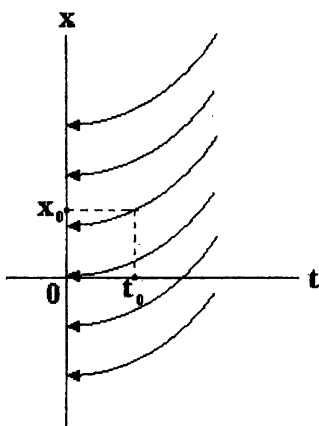


Рис. 1

График функций (15) в системе координат (t, x) легко представить (рис. 1).

График любого решения $x = \varphi(t)$ д.у. (7) называется **интегральной кривой**. На рис. 1 изображены все интегральные кривые д.у. (14) [по-настоящему все интегральные кривые - их бесконечное (континуальное) множество - заполняют всю правую полуплоскость $t > 0$,

$x \in (-\infty; +\infty)$ плоскости (t, x)].

Пример 2. Рассмотрим похожее на (14) д.у.

$$\frac{dx}{dt} = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Прежде всего заметим, что функция

$$x = \varphi(t) \equiv 0, t \in (-\infty; +\infty) \quad (18)$$

является решением д.у. (17). При $x > 0$ [для $x < 0$ правая часть (17) не определена] уравнение (17) равносильно следующему

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}, \quad (19)$$

причем, очевидно, что

$$x^{-\frac{1}{2}} > 0. \quad (20)$$

Рассматривая в (19) t как функцию x , получаем

$$t = \int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx = x^{\frac{1}{2}} + C, \quad (21)$$

откуда

$$x^{\frac{1}{2}} = t - C > 0$$

и

$$x = (t - C)^2, t \in (C; +\infty). \quad (22)$$

Легко видеть и непосредственно, что функции (22) на соответствующих интервалах $(C; +\infty)$ при любом $C \in (-\infty; +\infty)$ являются решениями д.у. (17). Из (18) и (22) следует, что решениями д.у. (17) на $(-\infty; +\infty)$ являются функции

$$\varphi_c(t) = \begin{cases} 0, & \text{для } -\infty < t \leq -C \\ (t+C)^2 & \text{для } -C < t < +\infty \end{cases} \quad (23)$$

Таким образом, для начальных данных (t_0, x_0) при $x_0 > 0$ существует единственное решение (19)

$$\varphi_{\sqrt{x_0}-t_0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } -\infty < t \leq -\sqrt{x_0} + t_0 \\ (t - t_0 + \sqrt{x_0})^2 & \text{для } -\sqrt{x_0} + t_0 < t < +\infty \end{cases}, \quad (24)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$x|_{t=t_0} = x_0 > 0.$$

Для начальных данных (t_0, x_0) существует бесконечное множество

решений (19):

$$\begin{cases} x = \varphi_0(t) & \text{при } -C \geq t_0 \\ x \equiv 0 & \text{при } t \in (-\infty; +\infty), \end{cases} \quad (25)$$

которые обращаются в нуль при $t = t_0$.

Интегральные линии уравнения (19) имеют вид (рис. 2).

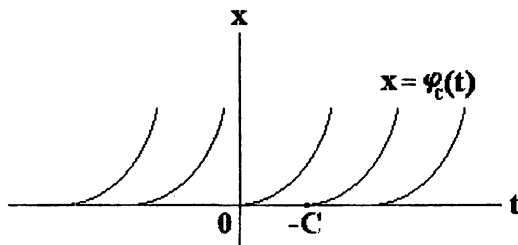


Рис. 2

Уравнения (14) и (19) показывают разумность поиска условий на правую часть $f(t, x)$ д.у. (7), гарантирующих, что:

1) при любых начальных данных $(t_0; x_0)$ из некоторого множества решение задачи Коши для (7) с указанными начальными данными **существует**;

2) это решение только одно - **единственно**.

Утверждения такого типа называются **теоремами существования и единственности**.

Приведем такую теорему.

Если $f(t, x)$ и $f'_x(t, x) = \frac{\partial f}{\partial x}$ непрерывны в какой-либо области G плоскости $(t; x)$, то для любых начальных данных $(t_0, x_0) \in G$ существует интервал $(a_0; b_0) \ni t_0$ и функция $\varphi_0(t)$, определенная на нем, такая, что

$$\begin{cases} \varphi'_0(t) = f(t, \varphi_0(t)), & t \in (a_0; b_0) \text{ и} \\ \varphi_0(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (26)$$

причем если

$$\begin{cases} \psi'(t) = f(t, \psi(t)), & t \in (a; b) \\ \psi_0(t_0) = x_0, & t_0 \in (a; b), \end{cases} \quad (27)$$

то

$$\begin{cases} a \geq a_0; b \leq b_0 \\ \psi(t) = \varphi_0(t), & t \in (a; b). \end{cases} \quad (28)$$

Иллюстрирующий рисунок имеет вид (рис. 3).

Решение $\varphi_0(t)$ называется единственным **непродолжаемым решением** задачи Коши для д.у. (7) в области G с начальными данными $(t_0; x_0)$.

Для д.у. (14) с $f(t, x) = \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}$ и $f'_x(t, x)$ условия приведенной теоремы

выполнены в правой полуплоскости $G = \{t > 0; -\infty < x < +\infty\}$ и единственное непродолжаемое решение дается в (15). Очевидно, $a_0 = 0, b_0 = +\infty$ для любых $(t_0, x_0) \in G$.

Для д.у. (17) с $f(t, x) = 2x^{\frac{1}{2}}$ и $f'_x(t, x) = x^{-\frac{1}{2}}$, непрерывными в верхней полуплоскости $G = \{-\infty < t < +\infty; x > 0\}$, по приведенной теореме единственное непродолжаемое решение, соответствующее начальным данным $(t_0; x_0 > 0)$, дается формулой

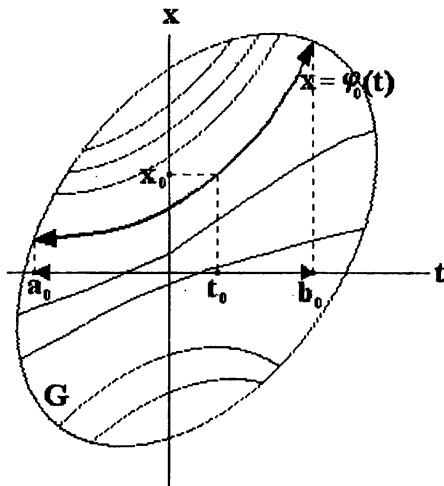


Рис. 3

$$\varphi_0(t) = (t - t_0 + \sqrt{x_0})^2 \text{ при } a_0 = -\sqrt{x_0} + t_0 < t < +\infty = b_0. \quad (29)$$

Сформулированную выше теорему существования и единственности можно доказывать **методом итераций**, состоящим в том, что

$$\varphi_0(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{0,k}(t), \quad (30)$$

где

$$\begin{cases} \varphi_{0,0}(t) \equiv x_0 \\ \varphi_{0,k+1}(t) \equiv x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau; \varphi_{0,k}(\tau)) d\tau. \end{cases} \quad (31)$$

Нужно только иметь в виду, что метод итераций (30) - (31) позволяет найти $\varphi_0(t)$ на каком-то интервале $(t_0 - \delta_0; t_0 + \delta_0)$ и для нахождения $\varphi_0(t)$ на $(a_0; b_0)$ придется многократно повторять процедуру, изменяя точку (t_0, x_0) . Вместе с тем (30), (31) дают хороший **приближенный способ** решения задачи Коши для д.у. (7).

Иногда, когда в области G имеет место существование и единственность решения задачи Коши для д.у. (7), любое решение может быть найдено из соотношения

$$x = \varphi(t; C) \quad (32)$$

при надлежащем выборе значения параметра из некоторого числового множества C . То есть уравнение

$$x_0 = \varphi(t_0; C) \quad (33)$$

имеет единственное решение при любых $(t_0; x_0) \in G$. В этом случае говорят, что $x = \varphi(t, C)$ является **общим решением д.у. (7)** в области G .

Например, $x = t^{\frac{3}{2}} + C, C \in (-\infty; +\infty)$ есть общее решение д.у. (14).
Иногда общее решение д.у. (7) имеет вид

$$x = \varphi(t, C_1, \dots, C_m).$$

Если $x = \psi(t)$ - решение д.у. (7) и в любой окрестности U_0 точки $(t_0, \psi(t_0))$ через эту точку проходит еще одно решение д.у. (7), отличное от $\psi(t)$, то решение $x = \psi(t)$ называется **особым**.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = 2|x|^{\frac{1}{2}}. \quad (34)$$

Его решение $\psi(t) \equiv 0$ является особым, так как через любую точку $(t_0; 0)$ помимо тождественного нуля проходит решение

$$\begin{cases} -(t + C')^2 & \text{при } -\infty < t < -C' \\ \varphi(t) = 0 & \text{при } -C' \leq t \leq -C'' \\ (t + C'') & \text{при } -C'' < t < +\infty, \end{cases} \quad (35)$$

где $-C' < t_0 < -C''$.

То, что (35) задает решение д.у. (34), нетрудно проверить непосредственно.

Решение $\psi(t) \equiv 0$ и для уравнения (17) считается особым, хотя график $x = \psi(t) \equiv 0$ является границей области G существования решений этого уравнения (рис. 4).

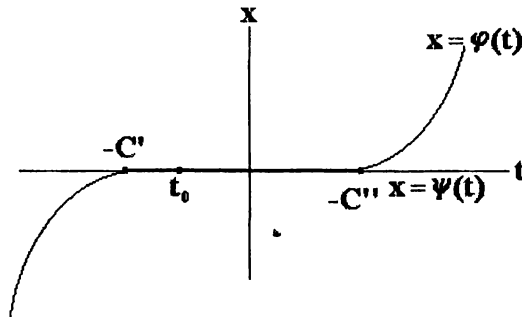


Рис. 4

Нахождение всех решений дифференциального уравнения называется интегрированием этого уравнения.

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К КВАДРАТУРАМ

Рассмотрим несколько типов дифференциальных уравнений, решение

которых можно довести до вычисления интегралов. Как говорят в этом случае, привести к квадратурам.

Уравнение (7) главы 1

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

очевидно равносильно следующему

$$dx = f(t, x)dt$$

или

$$f(t, x)dt - dx = 0. \quad (1)$$

Это уравнение является частным случаем общей ситуации

$$P(t, x)dt + Q(t, x)dx = 0, \quad (2)$$

где для простоты будем полагать функции $P(t, x)$ и $Q(t, x)$ непрерывными в некоторой области G плоскости (t, x) .

Соотношение (2) содержит дифференциалы двух переменных t и x , равноправных в том смысле, что каждая из них не имеет преимущественного права называться независимой.

Если в точке $(t_0; x_0)$ функция $Q(t, x)$ отлична от нуля, то найдется число $\delta_0 > 0$ такое, что

$$Q(t, x) \neq 0$$

при

$$(t - t_0)^2 + (x - x_0)^2 < \delta_0^2 \quad (3)$$

в силу предположения о непрерывности $Q(t, x)$.

В круге, определяемом неравенством (3) - радиуса δ_0 с центром в точке $(t_0; x_0)$, уравнение (2) равносильно дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{P(t, x)}{Q(t, x)}, \quad (4)$$

то есть привычному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

где

$$f(t, x) = -\frac{P(t, x)}{Q(t, x)}.$$

Будем считать, что в области G всюду

$$P^2(t, x) + Q^2(t, x) > 0. \quad (5)$$

Поэтому, если $Q(t_0, x_0) = 0$, то заведомо $P(t_0, x_0) \neq 0$ и в круге (3) (быть может с несколько меньшим значением δ_0)

$$P(t, x) \neq 0$$

и уравнение (2) равносильно дифференциальному уравнению

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{Q(t,x)}{P(t,x)} \quad (6)$$

с неизвестной функцией $t = t(x)$ от независимого переменного x . Фактически мы одновременно рассматриваем два д.у.:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \text{ и } \frac{dt}{dx} = f_1(t,x) = \frac{1}{f(t,x)} \quad (7)$$

и допускаем решения

$$x = \varphi(t) \text{ и } t = \psi(x). \quad (8)$$

Такая ситуация сродни возникающей при задании **неявной функции**

$$g(t, x) = 0. \quad (9)$$

Пример 1. Для иллюстрации рассмотрим уравнение типа (2)

$$2tdt + 2xdx = 0, \quad (10)$$

левая часть которого является полным дифференциалом функции $g(t, x) = t^2 + x^2 - C^2$.

Уравнение

$$t^2 + x^2 - C^2 = 0 \quad (11)$$

при $-C < t < C$ определяет решения

$$x = +\sqrt{C^2 - t^2} \text{ и } x = -\sqrt{C^2 - t^2} \quad (12)$$

д.у.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{x} \quad (13)$$

[при $-C < t < C$ функции в (12) отличны от нуля].

Равноправие переменных t и x в (11) позволяет рассматривать и функции

$$t = +\sqrt{C^2 - x^2}, \quad t = -\sqrt{C^2 - x^2} \quad (14)$$

на интервале $-C < x < C$, в том числе при $x = 0$, являющиеся решениями д.у.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t} \quad (15)$$

[при $-C < x < C$ функции t из (14) отличны от нуля].

Если для д.у. (13) допустить решение (11) в неявной форме, то

допускается решение д.у.

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

в виде

$$g(t, x) = 0, \quad (16)$$

называемое **интегралом дифференциального уравнения** или

$$g(t, x, C) = 0; g(t, x, C_1, \dots, C_m) = 0, \quad (17)$$

называемые **общим интегралом д.у.**

При этом точки плоскости (t, x) , удовлетворяющие (16), образуют интегральную кривую.

Фактически допускается обращение в бесконечность функции $f(t, x)$ - правой части д.у. (17).

Если в каждой точке (t, x) области G провести малый отрезок прямой с угловым коэффициентом $f(t, x)$, то получим поле направлений. В каждой точке касательная к графику решения д.у. (7) совпадает со штрихом поля направлений, возможно и вертикальным.

2.1. Дифференциальное уравнение с разделенными переменными

Уравнение вида

$$p(t)dt + q(x)dx = 0. \quad (18)$$

называется **д.у. первого порядка с разделенными переменными.**

Предположим, что функции $p(t)$, $q(x)$ непрерывны на интервалах (a, b) и (c, d) соответственно. Таким образом, область G , в которой рассматривается д.у. (18), является прямоугольник $(a, b) \times (c, d)$ на плоскости (t, x) .

Если $P(t)$, $Q(x)$ - первообразные для $p(t)$ и $q(x)$, то левая часть уравнения (18) является полным дифференциалом функции $u(t, x) = P(t) + Q(x)$, а само уравнение (18) принимает вид

$$du(t, x) = 0,$$

откуда

$$u(t, x) - C = 0$$

или

$$P(t) + Q(x) - C = 0. \quad (19)$$

Выражение (19) есть общий интеграл д.у. (18).

Напомним, что

$$P(t) = \int p(t)dt, \quad Q(x) = \int q(x)dx,$$

то есть уравнение (18) сводится к квадратурам.

Пример 1. Рассмотрим на простейшем примере алгоритм решения уравнения типа (18)

$$2t dt - dx = 0.$$

Здесь $p(t) = 2t$, $q(x) = -1$. Следовательно,

$$P(t) = \int p(t) dt = \int 2t dt = t^2 + C_1, \quad Q(x) = \int (-1) dx = -x + C_2$$

и, опуская произвольные постоянные C_1, C_2 , получаем по (19)

$$t^2 - x - C = 0,$$

откуда окончательно

$$x = t^2 - C.$$

Решение простейших д.у. вида (18) может дать немалую пищу для размышлений.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\cos t \, dt - 2x dx = 0. \quad (20)$$

Функции $p(t) = \cos t$ и $q(x) = -2x$ определены на всей числовой прямой $(-\infty; +\infty)$. Однако, так как общий интеграл (20) имеет вид,

$$\sin t + x^2 - C = 0 \quad (21)$$

или

$$x^2 = C - \sin t,$$

то, во-первых, возникает ограничение на $C > -1$ ($x^2 \geq 0$), а во-вторых, при разных C решения вида $x = \varphi(t, C)$ определены на разных интервалах.

Для $C > 1$ решения

$$x = +\sqrt{C - \sin t} \quad \text{и} \quad x = -\sqrt{C - \sin t} \quad (22)$$

определены на $(-\infty; +\infty)$ и являются периодическими с периодом 2π функциями.

Для $C = 1$ решения (22) определены на $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Для $-1 < C < 1$ решения (22) определены на интервале $(2\pi k - \arcsin C; (2k + 1)\pi + \arcsin C)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Сказанное можно проиллюстрировать рисунком.

Характер поведения кривых на рис. 5 проясняется, если уравнение (20) записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{2x}. \quad (23)$$

Поле направлений вертикально при $x = 0$, $t \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. В точках

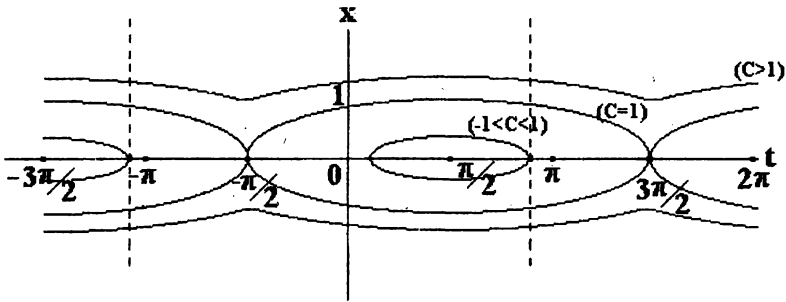


Рис. 5

($0; \frac{\pi}{2} + 2\pi k$) поле направлений не определено [в правой части (23) дробь $0/0$, не имеющая смысла].

Решение $x = \varphi(t)$ уравнения (23) допускает периодичность с периодом 2π :

если $\varphi(t + 2\pi) = \varphi(t)$, то $\frac{\cos(t+2\pi)}{\varphi(t+2\pi)} = \frac{\cos t}{\varphi(t)}$ и $\frac{d\varphi(t+2\pi)}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt}$.

Далее, если

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\cos t}{\varphi(t)},$$

то

$$\frac{d(-\varphi(t))}{dt} = \frac{\cos t}{(-\varphi(t))}$$

и вместе с $x = \varphi(t)$ решением (23) является и функция $x = -\varphi(t)$.

В верхней полуплоскости $x > 0$ производная (см. (23))

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} > 0 \text{ при } \cos t > 0, \text{ то есть при } t \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \\ \frac{dx}{dt} < 0 \text{ при } \cos t < 0, \text{ то есть при } t \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right). \end{cases}$$

В точках $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ решения при $x > 0$ имеют локальный максимум (при $x < 0$ - локальный минимум), поскольку меняет знак с «+» на «-» (с «-» на «+»).

В точках $t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $x > 0$ решения, если они существуют, имеют локальный минимум.

При переходе через $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ функция $\cos t$ меняет знак.

Если $\varphi(\frac{\pi}{2} + 2\pi k + \tau) = \varphi(\frac{\pi}{2} + 2\pi k - \tau)$, то согласно (23)

$$\left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=\frac{\pi}{2}+\pi k+\tau} = - \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=\frac{\pi}{2}+\pi k-\tau}$$

и глобальная картина интегральных линий симметрична относительно вертикальных прямых $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

В области $\{x < 0, t \in (-\infty; +\infty)\}$ и $\{x > 0, t \in (-\infty; +\infty)\}$ функции

$$\frac{\cos t}{2x} \text{ и } \left(\frac{\cos t}{2x} \right)'_x = -\frac{\cos t}{2x^2}$$

непрерывны и, следовательно, выполнены условия теоремы существования и единственности.

Близкими к д.у. с разделенными переменными являются уравнения следующего типа.

2.2. Уравнения с разделяющимися переменными

К дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными относят д.у. вида

$$p_1(t) p_2(x) dt + q_1(t) q_2(x) dx = 0. \quad (24)$$

Опять будем предполагать, что функции $p_1(t)$, $q_1(t)$ непрерывны на (a, b) , а $p_2(x)$, $q_2(x)$ - на (c, d) .

Если

$$p_2(x_0) = 0, \quad (25)$$

то $x \equiv x_0$ удовлетворяет (24). Если

$$q_1(t_0) = 0, \quad (26)$$

то $t \equiv t_0$ удовлетворяет (24).

Таким образом, (24) имеет решениями функции, графики которых являются частями некоторых горизонтальных и вертикальных прямых. Естественно считаем, что $t_0 \in (a, b)$, а $(x_0) \in (c, d)$.

Для точек прямоугольника $(a, b) \cdot (c, d)$, в которых

$$p_2(x) \cdot q_1(t) \neq 0, \quad (27)$$

уравнение (24) равносильно следующему

$$\frac{p_1(t)}{q_1(t)} dt + \frac{q_2(x)}{p_2(x)} dx = 0, \quad (28)$$

являющемуся уравнением с разделенными переменными.

Пример 1. Как иллюстрацию рассмотрим очень простое уравнение типа (24)

$$2t(x^2 + 1) dt + 2(t^2 + 1)x dx = 0.$$

Очевидно, что можно считать

$$p_1(t) = 2t, p_2(x) = x^2 + 1, q_1(t) = t^2 + 1, q_2(x) = 2x.$$

Всюду выполняется условие (27)

$$p_2(x) q_1(t) = (x^2 + 1)(t^2 + 1) \neq 0,$$

так что исходное д.у. равносильно уравнению с разделенными переменными

$$\frac{2t}{t^2 + 1} dt + \frac{2x}{x^2 + 1} dx = 0,$$

получаемому делением на $(x^2 + 1)(t^2 + 1)$. Имеем для $P(t)$, $Q(x)$ -

первообразных функций $\frac{2t}{t^2 + 1}$ и $\frac{2x}{x^2 + 1}$ соответственно выражения

$$P(t) = \ln|t^2 + 1|, Q(x) = \ln|x^2 + 1|.$$

На основании (19), выбирая произвольную постоянную C в виде $\ln|C'|$, получаем

$$\ln|t^2 + 1| + \ln|x^2 + 1| - \ln|C'| = 0$$

или

$$(t^2 + 1)(x^2 + 1) = C' > 0.$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$(t^2x - x)dt + (tx^2 + t)dx = 0. \quad (29)$$

Это уравнение можно записать в виде

$$x(t^2 - 1)dt + t(x^2 + 1)dx = 0.$$

По (25), (26) функции $x \equiv 0$ и $t \equiv 0$ являются решениями (29). При $tx \neq 0$ в любом из четырех квадрантов уравнение (29) равносильно следующему

$$\frac{t^2 - 1}{t} dt + \frac{x^2 + 1}{x} dx = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{2}t^2 - \ln|t| + \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| = \frac{t^2 + x^2}{2} + \ln\left|\frac{x}{t}\right| = C. \quad (30)$$

Это общий интеграл д.у. (29) в любом из четырех квадрантов. В каждом из них уравнение (29) равносильно уравнению

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x(t^2-1)}{t(x^2+1)}. \quad (31)$$

Из (31) следует, что если $x = \varphi(t)$ - решение этого д.у., то $x = -\varphi(t)$ также является его решением:

$$\frac{d(-\varphi(t))}{dt} = \frac{(-\varphi(t))(t^2-1)}{t((-\varphi(t))^2+1)} \Leftrightarrow \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\varphi(t)(t^2-1)}{t((\varphi(t))^2+1)}.$$

Далее, если $\varphi(-t) = \varphi(t)$, то

$$\frac{d(-\varphi(t))}{dt} = -\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\varphi(t)(t^2-1)}{-t((\varphi(t))^2+1)} = -\frac{\varphi(t)(t^2-1)}{t((\varphi(t))^2+1)}$$

и при $x = \varphi(t)$, $t > 0$, удовлетворяющем (31), $x = \varphi(-t)$ также удовлетворяет (31).

Следовательно, глобальная картина графиков решений имеет оси координат $x = 0$ и $t = 0$ осями симметрии. Тогда начало координат - центр симметрии глобальной картины. В силу сказанного достаточно изучать решения в первом квадранте $\{t > 0, x > 0\}$. В первом квадранте (см. (31))

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} > 0 \text{ при } 0 < t < 1 \\ \frac{dx}{dt} < 0 \text{ при } 1 < t < +\infty \end{cases}$$

и, таким образом, любое решение в первом квадранте достигает максимума при $t = 1$.

Так как функции

$$-\frac{x(t^2-1)}{t(x^2+1)} \text{ и } \left(-\frac{x(t^2-1)}{t(x^2+1)}\right)_x = \frac{(x^2-1)(t^2-1)}{t(x^2+1)^2}$$

непрерывны в правой полуплоскости ($t > 0$, $-\infty < x < +\infty$) [равно как и в левой ($t < 0$, $-\infty < x < +\infty$)], то по теореме существования и единственности через любую точку этой полуплоскости проходит, притом только одно, решение д.у. (31). Так как $x \equiv 0$, $t > 0$ - решение (31), то если $\varphi(t_0) > 0$ при $t_0 > 0$, то $\varphi(t) > 0$ на всем интервале определения. Можно показать, что это $(0; +\infty)$.

Вблизи начала координат $(0; 0)$ плоскости (t, x) функция $-\frac{x(t^2-1)}{t(x^2+1)} \approx \frac{x}{t}$.

Уравнение $\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{\tilde{x}}{t}$ имеет решениями функции $\tilde{x} = C \cdot t$, что непосредственно проверяется

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{d(C \cdot t)}{dt} = C = \frac{C \cdot t}{t} = \frac{\bar{x}}{t}.$$

При $t \rightarrow +\infty$ любое решение $\varphi(t)$ д.у. (31) в первом квадранте убывает и так как $\chi = C > 0$ не есть решение (31), то $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$.

Поэтому при $t \rightarrow +\infty$

$$-\frac{x(t^2-1)}{t(x^2+1)} \approx -\frac{xt^2}{t} = -xt.$$

Уравнение

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{\bar{x}}{xt}$$

легко решается (уравнение с разделяющимися переменными):

$$t dt + \frac{1}{x} d\bar{x} = 0,$$

откуда

$$\frac{t^2}{2} + \ln|\bar{x}| = \ln|C|$$

и

$$\tilde{x} = C e^{-\frac{t^2}{2}}, C > 0.$$

Таким образом, для решения $\chi = \varphi(t)$ д.у. (31) получим

$$\chi = \varphi(t) \approx C e^{-\frac{t^2}{2}}, C > 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty.$$

Сказанное позволяет изобразить глобальную картину решений д.у. (29) (рис. 6).

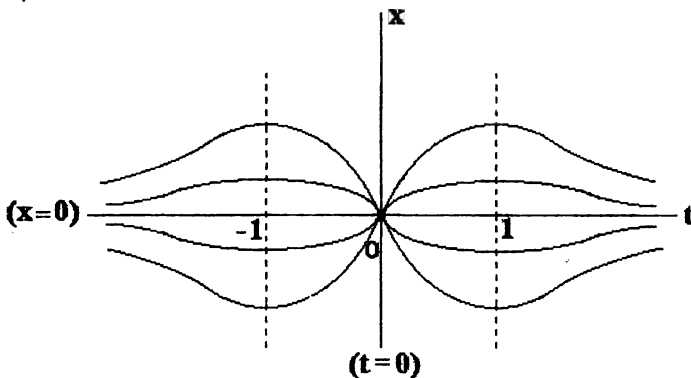


Рис. 6

Пример 3. Рассмотрим задачу движения парашюта с грузом, то есть задачу решения д.у. (2) главы 1, где

$$F(t) = mg - k \cdot v(t). \quad (32)$$

При этом mg - вес груза, $-k \cdot v$ - сила сопротивления воздуха. Для небольших скоростей эта сила пропорциональна скорости v , где коэффициент пропорциональности k зависит от площади поверхности парашюта и его конструкции. Положительным направлением считаем направление вниз (к земле). По (2) главы 1 и (32)

$$m \frac{dv}{dt} = mg - k \cdot v$$

или

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} \cdot v$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, эквивалентное для $g - \frac{k}{m} \cdot v \neq 0$

$$dt + \left(\frac{k}{m} \cdot v - g \right)^{-1} dv = 0.$$

Легко находим из этого уравнения общий интеграл

$$t + \frac{m}{k} \ln \left| \frac{k}{m} v - g \right| = \frac{m}{k} \ln C', C' > 0.$$

Отсюда

$$\left| \frac{k}{m} v - g \right| = C' e^{-\frac{k}{m} t}$$

и

$$v = \frac{mg}{k} + C e^{-\frac{k}{m} t}, |C| = \frac{m}{k} C' \quad (33)$$

Начальное условие

$$v|_{t=0} = v_0 \quad (34)$$

дает для C значение $(v_0 - \frac{mg}{k})$ и окончательно

$$v(t) = \frac{mg}{k} + (v_0 - \frac{mg}{k}) e^{-\frac{k}{m} t}. \quad (35)$$

Нетрудно заметить, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{mg}{k}.$$

Это весьма точно характеризует то обстоятельство, что приземление происходит практически с постоянной скоростью, прямо пропорциональной весу груза и обратно пропорциональной площади поверхности

парашюта. Эта скорость приземления, при большом времени спуска, практически не зависит от начальной скорости v_0 снижения. Наиболее простой вид (35) имеет при $v_0 = 0$:

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Пример 4. Уравнение (3) главы 1 при $N \neq 0$ равносильно уравнению

$$\alpha dt - \frac{1}{N} dN = 0,$$

откуда

$$\alpha t - \ln|N| + \ln|C| = 0$$

и

$$N = C \cdot e^{\alpha t}.$$

Начальное условие

$$N|_{t=0} = N(0) = N_0$$

дает

$$N = N_0 \cdot e^{\alpha t}. \quad (36)$$

При превышении коэффициента рождаемости над коэффициентом смертности, то есть при $\alpha > 0$ получаем экспоненциальный рост численности популяции. Для человеческой популяции, при постоянной скорости роста ресурсов $-k \cdot t$, и возникает «мальтузианский» вывод о «перенаселении».

На начальных этапах развития популяции, когда нет ограничения по питательной среде, закон (36) реально имеет место. В действительности более адекватной моделью изменения численности популяции является модель, описываемая д.у.

$$\frac{dN}{dt} = \beta N(N_m - N). \quad (37)$$

Данное уравнение также является уравнением с разделяющимися переменными. По смыслу объем популяции $N > 0$ и в квадранте $\{t > 0; N > 0\}$ очевидно постоянное решение $N \equiv N_m$.

В полуполосе $\{t > 0; 0 < N < N_m\}$ уравнение (37) равносильно

$$\beta dt - \frac{1}{N(N_m - N)} dN = 0,$$

что переписывается как

$$\beta dt - \frac{1}{N_m} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N_m - N} \right) dN = 0,$$

откуда получаем общий интеграл в виде

$$\beta t - \frac{1}{N_m} \ln \left| \frac{N_m - N}{N} \right| = \frac{1}{N_m} \ln|C|.$$

Из последнего соотношения находим N :

$$e^{(\beta N_m)t} \left(\frac{N_m}{N} - 1 \right) = C > 0 \quad (0 < N < N_m)$$

и, обозначив

$$\alpha = \beta \cdot N_m,$$

получаем

$$N = N_m \frac{1}{1 + C e^{-\alpha t}}.$$

Начальное условие

$$N(0) = N_0 < N_m$$

дает

$$C = \frac{N_m}{N_0} - 1 > 0.$$

Окончательно

$$N = N(t) = \frac{N_0 e^{\alpha t}}{\frac{N_0}{N_m} e^{\alpha t} + (1 - \frac{N_0}{N_m})}. \quad (38)$$

Из (38) при $0 < N_0 < N_m$ видно, что при $t > 0$

$$N_0 < N(t) < N_m$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = N_m$$

и при малых t

$$N(t) \approx N_0 e^{\alpha t}.$$

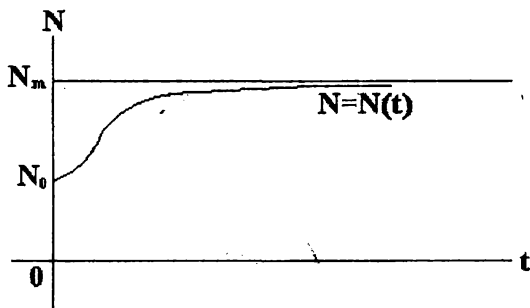


Рис. 7

Кривая на рис. 7 называется логистической. Заметим, что если $N_0 > N_m$, формула (38) остается верной и $N(t)$ при $t \rightarrow +\infty$ стремится к N_m ,

монотонно убывая. Таким образом, N_m оказывается устойчивым стационарным объемом популяции.

Приведенная модель качественно описывает поведение популяций в ряде реальных ситуаций.

Легко видеть, что уравнение (37) такое же, как и (4) из главы 1. Следовательно, действенность рекламы также описывается логистическим законом.

Уравнение (5) главы 1 также является уравнением с разделяющимися переменными и его решения, отличные от постоянных, даются формулами:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \frac{\frac{a(\alpha + \beta)}{\alpha} + \frac{b(\alpha + \beta)}{\beta} C e^{\varepsilon t}}{1 - C e^{\varepsilon t}}, \\ C = \frac{x_0 - \frac{a(\alpha + \beta)}{\alpha}}{x_0 - \frac{b(\alpha + \beta)}{\beta}}, \\ \varepsilon = k \frac{\beta \alpha - \alpha \beta}{\alpha + \beta}, \\ x_0 = x(0) \end{array} \right. \quad (39)$$

Нетрудно выяснить характер поведения этого решения в зависимости от параметров уравнения (5) главы 1.

2.3. Однородное уравнение первого порядка

Из анализа известно, что функция $f(t, x)$ называется **однородной порядка α** , если при любом $\lambda > 0$

$$f(\lambda t; \lambda x) = \lambda^\alpha f(t, x). \quad (40)$$

В случае натурального α значения λ могут быть любыми действительными. Легко понять, что при выполнении (40)

$$f(t, x) = t^\alpha f\left(1; \frac{x}{t}\right). \quad (41)$$

Для доказательства (41) достаточно положить в (40) $\lambda = \frac{1}{t}$.

Особое место занимают однородные функции нулевого измерения. При $\alpha = 0$ из (41) следует, что

$$f(t, x) = f\left(1; \frac{x}{t}\right) = g\left(\frac{x}{t}\right), \quad (42)$$

то есть на самом деле $f(t, x)$ является функцией отношения $\frac{x}{t}$.

Например,

$$f(t,x) = \frac{tx}{x^2 + t^2} = \frac{\frac{x}{t}}{\left(\frac{x}{t}\right)^2 + 1} \quad (43)$$

при $t \neq 0$.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad (44)$$

где $f(t,x)$ - однородная функция нулевого измерения, называется **однородным д.у. первого порядка**.

Заменой

$$x = t \cdot u(t) \quad (45)$$

(44) сводится к уравнению с разделяющимися переменными. Действительно, по (45) и (42)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u + t \frac{du}{dt} \\ f(t,x) = g\left(\frac{x}{t}\right) = g(u), \end{cases}$$

откуда

$$t \frac{du}{dt} = g(u) - u. \quad (46)$$

Если $g(u_0) = u_0$, то $u \equiv u_0$ - решения (46), так что

$$x = u_0 \cdot t, \quad t \neq 0 \quad (47)$$

- решение (44).

Для $g(u) - u \neq 0$ и $t \neq 0$ уравнение (46) равносильно

$$\frac{1}{t} dt + \frac{1}{u - g(u)} du = 0. \quad (48)$$

Если $\Phi(u)$ - первообразная для $\frac{1}{u - g(u)}$, то $\ln|Ct| + \Phi(u) = 0$ - общий интеграл д.у. (48), а

$$\ln|Ct| + \Phi\left(\frac{x}{t}\right) = 0 \quad (49)$$

- общий интеграл д.у. (44).

Из (49) видно, что преобразование подобия с центром в начале координат и произвольным коэффициентом подобия $\lambda > 0$ переводит одну интегральную кривую в другую, естественно с другим значением

постоянной C .

Пример 5. Для примера использования алгоритма (45) - (49) уравнения (44) рассмотрим однородное д.у. первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = \frac{xt - x^2}{t^2}$$

при $t \neq 0$. Очевидно, что это уравнение можно переписать (для $t \neq 0$) в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} - \left(\frac{x}{t}\right)^2,$$

откуда следует его однородность, то есть возможность представления

в виде (42). Полагая $x = t \cdot u$ и $dx = u + t \frac{du}{dt}$, перепишем это д.у.

$$u + t \frac{du}{dt} = u - u^2$$

или

$$t \frac{du}{dt} = -u^2.$$

Очевидное решение $u \equiv 0$ дает для исходного д.у. решение $x \equiv 0$. Разделяя переменные, получаем

$$\frac{1}{t} dt + \frac{1}{u^2} du = 0$$

и после интегрирования

$$\ln|Ct| - \frac{1}{u} = 0,$$

откуда общий интеграл принимает вид

$$\ln|Ct| - \frac{1}{x/t} = 0, x \neq 0.$$

Помимо решений, входящих в общий интеграл, не следует забывать о решении $x \equiv 0$.

Пример 6. Рассмотрим пример:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2 + x^2}{2t^2}. \quad (50)$$

Так как $\frac{t^2 + x^2}{2t^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{t}\right)^2$, то д.у. (50) однородное. Замена (45) дает

$$u + t \frac{du}{dt} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} u^2,$$

откуда

$$t \frac{du}{dt} = \frac{1}{2}(u-1)^2,$$

$u \equiv 1$ является решением последнего уравнения, а $x = t$ для $t \in (-\infty; 0)$ или

$t \in (0; +\infty)$ - решениями (50). При $u \neq 1$ имеем $\frac{1}{2t} dt - \frac{1}{(u-1)^2} du = 0$,

далее

$$\frac{1}{2} \ln|Ct| - \frac{1}{u-1} = 0, C \neq 0.$$

и

$$u = 1 - \frac{2}{\ln|Ct|}.$$

Окончательно функции

$$x = t - \frac{2t}{\ln|Ct|}, C \neq 0 (C > 0) \quad (51)$$

на интервалах $(-\infty; -\frac{1}{C})$; $(-\frac{1}{C}; 0)$; $(0; \frac{1}{C})$; $(\frac{1}{C}; +\infty)$ являются решениями д.у. (50).

Найденные ранее решения $x = t$ на $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ получаются предельным переходом при $C \rightarrow 0$ из (51).

Общая картина интегральных линий приведена на рис.8.

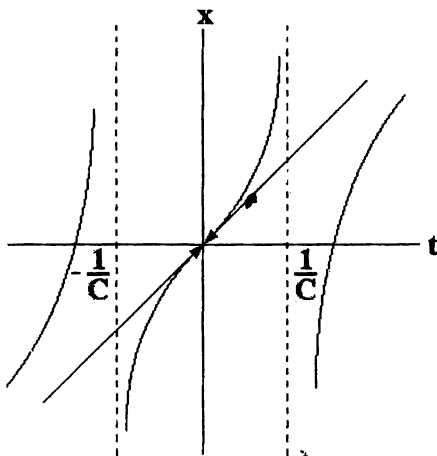


Рис. 8

Так как

$$f(t, x) = \frac{t^2 + x^2}{2t^2} \text{ и } f'_x(t, x) = \frac{x}{t^2}$$

непрерывны в полуплоскостях $(t > 0; -\infty < x < +\infty)$ и $(t < 0; -\infty < x < +\infty)$, то в этих полуплоскостях имеет место существование и единственность решения задачи Коши для д.у. (50).

На этом примере видно, что $f(t, x)$ разрывна в точках $(0; x \neq 0)$ и в этих точках нет существования решения. В точке $(0; 0)$ можно

доопределить функцию $\frac{t^2 + x^2}{2t^2}$ единицей, например, так, что она станет непрерывной вдоль прямой $x = t$, что оказывается достаточным для существования решения, входящего в точку $(0; 0)$. Но при $x = t$ функция

$f'_x(t, x) = \frac{x}{t^2}$ терпит разрыв в начале координат и нарушается единственность решения. Таким образом, условия теоремы существования и единственности, хотя и являются только достаточными, оказываются весьма точными.

2.4. Уравнения, приводящиеся к однородным

Некоторые д.у. с помощью замены переменных удастся свести к однородным. Такими, например, являются д.у. вида

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right), \quad (52)$$

где

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0. \quad (53)$$

Определим числа t_0, x_0 из системы

$$\begin{cases} a_1 t_0 + b_1 x_0 + c_1 = 0 \\ a_2 t_0 + b_2 x_0 + c_2 = 0, \end{cases} \quad (54)$$

что в силу (53) можно сделать однозначно, и заменим в (52) переменные (t, x) на (τ, ξ) по формулам

$$\begin{cases} x = \xi + x_0 \\ t = \tau + t_0. \end{cases} \quad (55)$$

Из (52), (54) и (55) получим

$$\frac{d\xi}{d\tau} = f\left(\frac{a_1 \tau + b_1 \xi}{a_2 \tau + b_2 \xi}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{\xi}{\tau}}{a_2 + b_2 \frac{\xi}{\tau}}\right) = g\left(\frac{\xi}{\tau}\right) \text{ при } \tau \neq 0. \quad (56)$$

Уравнение (56) очевидно является однородным.

Пример 1. Рассмотрим пример

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t + 3x - 5}{t + 4x}.$$

Из системы

$$\begin{cases} 2t_0 + 3x_0 - 5 = 0 \\ t_0 + 4x_0 = 0 \end{cases}$$

следует, что $t_0 = 4$, $x_0 = -1$ и по (55), (56) исходное д.у. сводится к однородному

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \frac{2 + 3\frac{\xi}{\tau}}{1 + 4\frac{\xi}{\tau}}, \tau \neq 0.$$

Стандартная замена $\xi = \tau \cdot u$ дает $u + \tau \frac{du}{d\tau} = \frac{2 + 3u}{1 + 4u}$.

Откуда

$$\tau \frac{du}{d\tau} = \frac{2 + 2u - 4u^2}{1 + 4u}.$$

Так как

$$2 + 2u - 4u^2 = -2(u - 1)(2u + 1),$$

то $u \equiv 1$, $u \equiv -\frac{1}{2}$ решения последнего д.у. и функции

$$x = t - 5; x = -\frac{1}{2}t + 1 \quad (57)$$

являются решениями исходного уравнения. Далее,

$$\frac{d\tau}{\tau} + \frac{4u + 1}{4u^2 - 2u - 2} du = 0,$$

откуда

$$\tau + \left(\frac{5}{6(u-1)} + \frac{1}{6\left(u + \frac{1}{2}\right)} \right) du = 0.$$

Это дает общий интеграл

$$\tau^6(u - 1)^5\left(u + \frac{1}{2}\right) = C,$$

откуда

$$(\xi - \tau)^5 \left(\xi + \frac{\tau}{2} \right) = C$$

и окончательно

$$(x - t + 5)^5(x + \frac{t}{2} - 1) = C. \quad (58)$$

Заметим, что решения (57) получаются из (58) при $C = 0$.

Осталось отметить, что если (53) не выполняется и

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0,$$

(это означает, что прямые $a_1 t + b_1 x + c_1 = 0$ и $a_2 t + b_2 x + c_2 = 0$ параллельны), то замена

$$a_1 t + b_1 x + c_1 = y$$

приводит д.у. (52) к виду

$$\frac{dy}{dt} = h(y).$$

2.5. Уравнение Бернулли

Уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t) \cdot x^\alpha, \alpha \neq 1 \quad (59)$$

называется **уравнением Бернулли**.

Прежде всего отметим, что при $\alpha = 1$ уравнение (59) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} + (P(t) - Q(t))x = 0,$$

то есть является уравнением с разделяющимися переменными, общее решение которого

$$x = C e^{-\int (P(t) - Q(t)) dt}.$$

Разумеется, считаем, что $P(t)$ и $Q(t)$ непрерывны на некотором интервале $(a; b)$.

Область изменения величины x в (59) определяется значением α , то есть областью существования функции x^α .

Для решения д.у. (59) делаем замену

$$x = x(t) = u(t) \cdot v(t) = u \cdot v, \quad (60)$$

то есть вместо одной неизвестной функции вводим две! Но появляется возможность при этом выбрать одну из функций $u(t)$ или $v(t)$, как будет удобнее. Подстановка (60) в (59) дает

$$v \frac{du}{dt} + u \frac{dv}{dt} + P(t)u \cdot v = Q(t)(u \cdot v)^\alpha. \quad (61)$$

Найдем v из уравнения

$$\frac{dv}{dt} + P(t)v = 0, \quad (62)$$

то есть положим

$$v = e^{-\int P(t)dt} > 0. \quad (63)$$

При этом среди первообразных для $P(t)$ выберем наиболее удобную. С учетом (62) уравнение (61) принимает вид

$$v \frac{du}{dt} + q(t)u^\alpha \cdot v^\alpha = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными (t, u) и общее решение

$$U^{(1-\alpha)}(t) = (C + (1-\alpha) \int Q(t) e^{(1-\alpha) \int P(t)dt} dt). \quad (64)$$

его с учетом (63) имеет вид

$$x = \left[C + (1-\alpha) \int Q(t) e^{(1-\alpha) \int P(t)dt} dt \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \cdot e^{-\int P(t)dt}. \quad (65)$$

По (60) окончательно

Разумеется, не следует запоминать формулу (65). Надо использовать алгоритм, описанный в (60) - (63).

Пример 1. Иллюстрируем сказанное примером:

$$\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t} = \frac{t^3}{3x^2}.$$

Очевидно, что это д.у. имеет вид (59), если положить

$$P(t) = -\frac{1}{t}, Q(t) = \frac{t^3}{3}, \alpha = -2.$$

Решать данное уравнение Бернулли можно лишь при условии $t \neq 0, x \neq 0$. Замена $x = u \cdot v$ приводит его к виду (61)

$$v \frac{du}{dt} + u \frac{dv}{dt} - \frac{1}{t} uv = \frac{t^3}{3u^2v^2}.$$

Если положить, как в (62)

$$\frac{dv}{dt} - \frac{1}{t} v = 0,$$

то есть считать v каким-то ненулевым решением уравнения с разделяющимися переменными, например $v = t$ (любое решение последнего д.у. очевидно есть $v = C \cdot t$), то для u получаем дифференциальное

уравнение

$$t \frac{du}{dt} = \frac{t^3}{3u^2 t^2}$$

или

$$3u^2 du = dt,$$

откуда

$$u^3 = t + C \text{ и } u = \sqrt[3]{t+C}.$$

Окончательно

$$x = u \cdot v = t \cdot \sqrt[3]{t+C}.$$

Как было отмечено, $t \neq 0$, $x \neq 0$, что влечет ограничение $t + C \neq 0$.

Пример 2. Решим следующее уравнение Бернулли, требующее дополнительных исследований:

$$\frac{dx}{dt} - \frac{4}{t}x = t \cdot \sqrt{x}. \quad (66)$$

Это уравнение Бернулли с $\alpha = \frac{1}{2}$. Очевидно, что $x \geq 0$, $t \neq 0$ и $x \equiv 0$ - решение данного уравнения. Отметим, что $x \equiv 0$ - решение любого уравнения Бернулли с $\alpha > 0$. Таким образом, достаточно рассматривать решения (66) в первом ($t > 0$, $x > 0$) и втором ($t < 0$, $x > 0$) квадрантах. Так как (66) можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4}{t}x + t \cdot \sqrt{x} \quad (67)$$

и функции

$$f(t, x) = \frac{4}{t}x + t \cdot \sqrt{x}; f'_x(t, x) = \frac{4}{t} + \frac{t}{2\sqrt{x}}$$

непрерывны в указанных квадрантах, то в них имеет место существование и единственность решения задачи Коши для д.у. (66), (67). Так как правая

часть (67) нечетная по t функция, то если $x(-t) = x(t)$, а $\frac{dx}{dt}(-t) = -\frac{dx}{dt}(t)$,

очевидно, глобальная картина интегральных линий симметрична относительно оси Ox (вертикальной). Поэтому достаточно решать уравнение (66) или (67) в первом квадранте ($t > 0$; $x > 0$).

Произведя в (66) замену (60), получаем

$$v \frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} - \frac{4}{t}u \cdot v = t \cdot \sqrt{u \cdot v}. \quad (68)$$

Положим [как в (62)] $\frac{dv}{dt} - \frac{4}{t}v = 0$. Для $v \neq 0$ (так как $x = u \cdot v > 0$) это

уравнение равносильно

$$-\frac{4dt}{t} + \frac{dv}{v} = 0$$

- уравнение с разделенными переменными, откуда $v = Ct^4$.

Проще всего считать $C = 1$ и выбрать $v = t^4$. Тогда для $u > 0$ получаем из (68) уравнение

$$t^4 \frac{du}{dt} = t \cdot \sqrt{u \cdot t^4}, t > 0$$

или

$$t \frac{du}{dt} = \sqrt{u}. \quad (69)$$

Здесь следует сделать важное замечание: $\sqrt{u} > 0$. Уравнение (69) - с разделяющимися переменными и

$$\sqrt{u} = \frac{1}{2} \ln|Ct|.$$

В силу сделанного замечания $\ln|Ct| > 0$ и

$$|t| > |C|^{-1}. \quad (70)$$

Для $t > 0$ $|t| > |C|^{-1} = \frac{1}{|C|}$. Имеем $u = \frac{1}{4} \ln^2|Ct|$

и

$$x = \frac{t^4}{4} \ln^2|Ct|, |t| > \frac{1}{|C|}. \quad (71)$$

Картина интегральных линий представлена на рис. 9.

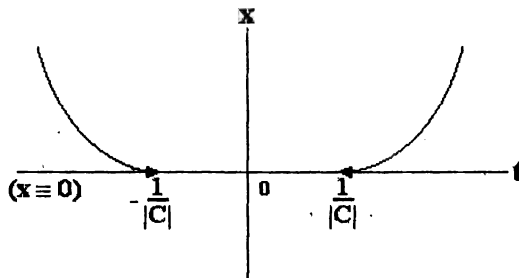


Рис. 9

Решение $x \equiv 0$ является особым.

Если не отмечать в (71) условие $|t| > \frac{1}{|C|}$, то функция $\frac{t^4}{4} \ln^2|Ct|$ оказывается определенной на всей прямой $(-\infty; +\infty)$ и ее график имеет вид (при двух

значениях постоянной), показанный на рис. 10.

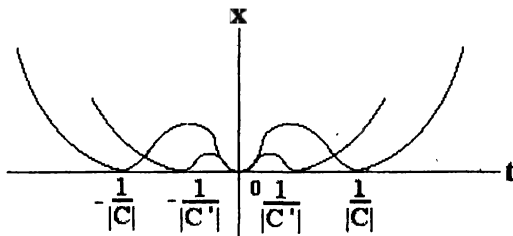


Рис. 10

Очевидно, что нарушена единственность решения задачи Коши в первом и втором квадрантах. Ошибочность рис. 10 следует из того, что по (67) при $t > 0, x > 0$ производная $\frac{dx}{dt} > 0$ и $x(t)$ возрастает на интервале определения для положительных значений t .

2.6. Линейное уравнение первого порядка

Уравнение Бернулли при $\alpha = 0$, то есть д.у. вида

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t) \quad (72)$$

называется **линейным уравнением первого порядка**.

Согласно (65) решение д.у. (72) есть

$$x = (C + \int Q(t)e^{\int P(t)dt} dt)e^{-\int P(t)dt} \quad (73)$$

Запоминать формулу (73), разумеется, не следует. Надо использовать алгоритм решения дифференциального уравнения Бернулли, содержащийся в (60) - (62).

Иллюстрируем сказанное простым примером:

$$\frac{dx}{dt} + tx = t.$$

Если положить $P(t) = Q(t) = t$, то это уравнение принимает вид (72), то есть является линейным уравнением первого порядка. Произведя замену, как указано в (60), $x = u \cdot v$, получаем

$$v \frac{du}{dt} + u \frac{dv}{dt} + t \cdot u \cdot v = t.$$

Выберем v так, чтобы $\frac{dv}{dt} + t \cdot v = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными. При $v \neq 0$ оно равносильно уравнению

$$t dt + \frac{1}{v} dv = 0,$$

откуда

$$\frac{t^2}{2} + \ln|v| - C = 0.$$

Положим $C = 0$ и получим $\ln|v| = -\frac{t^2}{2}$ или $v = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Для функции u получаем д.у.

$$e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{du}{dt} = t$$

или

$$\frac{du}{dt} = t \cdot e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Легко видеть, что

$$u = \int t e^{\frac{t^2}{2}} dt = \int e^{\frac{t^2}{2}} d\left(\frac{t^2}{2}\right) = e^{\frac{t^2}{2}} + C.$$

Следовательно,

$$x = u \cdot v = (e^{\frac{t^2}{2}} + C) e^{-\frac{t^2}{2}} = 1 + C e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Заметим, что д.у. $\frac{dx}{dt} + tx = t$, записанное в виде $\frac{dx}{dt} + t(x-1) = 0$, является уравнением с разделяющимися переменными.

2.7. Уравнение в полных дифференциалах

Дифференциальное уравнение вида

$$P(t, x)dt + Q(t, x)dx = 0, \quad (74)$$

где

$$P'_x = Q'_t \left(\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial t} \right) \quad (75)$$

в некоторой области G плоскости (t, x) , называется **дифференциальным уравнением с полным дифференциалом**.

Выражение в левой части (74) при выполнении (75) является полным дифференциалом $du(t, x)$ некоторой функции $u(t, x)$ двух переменных (t, x) . То есть д.у. (74) есть

$$du(t, x) = 0,$$

откуда сразу следует общий интеграл дифференциального уравнения (74)

$$u(t, x) = C. \quad (76)$$

Таким образом, задача состоит в восстановлении функции $u(t, x)$

слагаемого). Окончательно получаем

$$u(t,x) = \frac{t^2}{2} + x \cdot e^x,$$

откуда общий интеграл д.у. (79) есть

$$\frac{t^2}{2} + x \cdot e^x = C.$$

2.8. Уравнения Клеро и Лагранжа

Рассмотрим дифференциальные уравнения, которые, как правило, нельзя разрешить относительно производной. Уравнение вида

$$x = t \frac{dx}{dt} + \Psi\left(\frac{dx}{dt}\right) \quad (80)$$

называется **уравнением Клеро**.

Уравнение Клеро решается с помощью введения параметра

$$p = \frac{dx}{dt}. \quad (81)$$

Подстановка (81) в (80) дает

$$x = t \cdot p + \Psi(p). \quad (82)$$

Считая, что функция Ψ имеет производную и имеет смысл $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt}$, продифференцируем (82) по t . Получим

$$\frac{dx}{dt} = p = t + t \frac{dp}{dt} + \Psi(p) \frac{dp}{dt}.$$

Отсюда

$$(t + \Psi'(p)) \frac{dp}{dt} = 0, \quad (83)$$

Из равенства $\frac{dp}{dt} = 0$ следует, что $p = C$ - постоянная и по (82)

$$x = t \cdot C + \Psi(C). \quad (84)$$

Это семейство прямых на плоскости (t, x) и (84) дает общий интеграл уравнения (80). Приравняв нулю еще один сомножитель в (83), получаем вместе с (82) систему

$$\begin{cases} t = -\Psi''(p) \\ x = -p\Psi''(p) + \Psi(p), \end{cases} \quad (85)$$

параметрически задающую некоторую линию на плоскости (t, x) . Оказывается, что (85) является особым решением уравнения (80).

Посмотрим на конкретном примере связь общего решения вида (84) и особого решения вида (85). На самом деле подобная ситуация имеет место и в общем случае.

Пример 1. Итак, рассмотрим уравнение Клеро

$$x = t \frac{dx}{dt} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \quad (86)$$

По (84) общее решение д.у. (86) имеет вид

$$x = C \cdot t + C^2, \quad (87)$$

а особое решение - система (85) есть

$$\begin{cases} t = -2p \\ x = -2p^2 + p^2 = -p^2. \end{cases}$$

Из этой системы легко исключить параметр p : $p = -\frac{t}{2}$ и

$$x = -\left(-\frac{t}{2}\right)^2 = -\frac{t^2}{4}. \quad (88)$$

Особое решение (88) является параболой. Запишем уравнение касательной прямой к параболе (88) в точке с абсциссой $t_0 = -2C$

$$x - \left(-\frac{(-2C)^2}{4}\right) = \left(-\frac{-2C}{4}\right)(t + 2C)$$

или

$$x + C^2 = Ct + 2C^2,$$

откуда

$$x = Ct + C^2,$$

то есть (87). Таким образом, любое решение, входящее в общее, является касательной к особому решению (то, что это особое решение, становится очевидным) (рис.11).

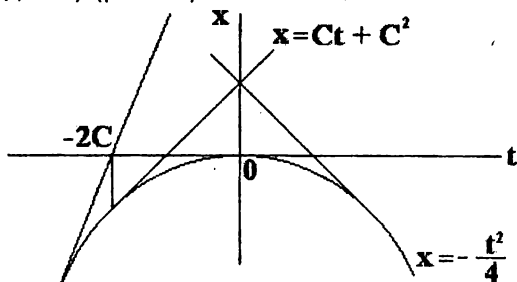


Рис.11

Мы имеем систему линий (87), зависящую от параметра C (однопараметрическое семейство линий), и линию (88), которая в каждой своей точке касается одной из линий семейства. Такая линия называется **огibaющей однопараметрического семейства**. И в общей ситуации особое решение (85) уравнения Клеро является огibaющей семейства прямых, составляющих общее решение.

Для конкретного уравнения (86) можно найти выражение для $\frac{dx}{dt}$.

Для этого следует решить (86) как квадратное относительно $\frac{dx}{dt}$.

Получим

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{2} \pm \sqrt{\frac{t^2}{4} + x}. \quad (89)$$

Формула (89) имеет смысл при

$$\frac{t^2}{4} + x \geq 0,$$

причем случай нулевого дискриминанта

$$\frac{t^2}{4} + x = 0$$

как раз дает особое решение $x = -\frac{t^2}{4}$.

Уравнением Лагранжа называется уравнение вида

$$x = t \cdot \varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) + \psi\left(\frac{dx}{dt}\right). \quad (90)$$

В частном случае $\varphi(u) = u$ уравнение Лагранжа переходит в уравнение Клеро.

Решается уравнение Лагранжа также введением параметра

$$p = \frac{dx}{dt},$$

как в (81). После введения параметра уравнение (90) переходит в следующее

$$x = t \cdot \varphi\left(\frac{dx}{dt}\right) + \psi\left(\frac{dx}{dt}\right). \quad (91)$$

Дифференцирование (91) по t дает

$$p = \varphi(p) + (t\varphi'(p) + \psi'(p)) \frac{dp}{dt}. \quad (92)$$

Если

$$p_0 = \varphi(p_0), \quad (93)$$

то $p \equiv p_0$, как легко видеть, есть решение д.у. (92), а следовательно, по (91) прямая

$$x = t \cdot \varphi(p_0) + \psi(p_0) \quad (94)$$

является графиком некоторого решения уравнения Лагранжа (90).

Заметим, что решений (93) может быть не одно, что дает некоторое множество решений (90).

При $p - \varphi(p) \neq 0$ уравнение (92) легко переписать в виде

$$\frac{dt}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} t = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}. \quad (95)$$

Уравнение (95) является линейным относительно функций $t = t(p)$ и решается изложенным ранее способом, после чего получаем решение

$$t = t(p; C). \quad (96)$$

Соотношения (96) и (91) дают параметрическую запись общего решения уравнения Лагранжа (90) в виде

$$\begin{cases} t = t(p; C) \\ x = \varphi(p) \cdot t(p; C) + \psi(p). \end{cases} \quad (97)$$

Напомним, что могут быть еще и решения вида (94) с p_0 , определенным из (93).

Пример 2. Решим следующее уравнение Лагранжа

$$x = 2t \frac{dx}{dt} - 4\left(\frac{dx}{dt}\right)^3. \quad (98)$$

Введение параметра $p = \frac{dx}{dt}$ по (98) дает

$$x = 2pt - 4p^3 \quad (99)$$

и далее

$$p = 2p + (2t - 12p^2) \frac{dp}{dt}. \quad (100)$$

При $p_0 = 0$ имеем $p_0 = 2p_0$, откуда по (99)

$$x \equiv 0$$

есть решение (98), что очевидно и непосредственно.

Затем от (100) переходим к линейному уравнению

$$\frac{dt}{dp} + \frac{2}{p} t = 12p,$$

откуда

$$t = (3p^4 + C) \frac{1}{p^2} = 3p^2 + \frac{C}{p^2}.$$

Окончательно общее решение д.у. Лагранжа (98) есть

$$\begin{cases} t = 3p^2 + \frac{C}{p^2} \\ x = \frac{2C}{p} + 2p^3, \end{cases}$$

а также решение $x \equiv 0$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОРЯДКА ВЫШЕ ПЕРВОГО

Дифференциальное уравнение вида

$$F(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}) = 0, \quad (1)$$

где натуральное $n \geq 2$ называется дифференциальным уравнением порядка выше первого (или высших порядков). При этом (1) является общей формой записи подобного уравнения. Как правило, исследуются уравнение более частного вида

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}), \quad (2)$$

называющееся **уравнением n -го порядка, разрешенным относительно старшей производной.**

Простейшее уравнение такого типа

$$\frac{d^n x}{dt^n} = 0 \quad (3)$$

решается последовательным n -кратным неопределенным интегрированием, в результате которого получаем

$$x = C_0 t^{n-1} + C_1 t^{n-2} + \dots + C_{n-1}.$$

Это общее решение д.у. (3) и оно содержит n произвольных постоянных. Аналогично и общее решение $\varphi(t, C_0, \dots, C_{n-1})$ уравнения (2) содержит n произвольных постоянных. При этом естественное условие - существование у функции $\varphi(t, C_0, \dots, C_{n-1})$ производных до порядка n включительно на некотором интервале (a, b) , зависящем от решения.

Выделение конкретного одного решения д.у. (2) требует, вообще говоря, задания каких-то n условий. Такими могут быть условия Коши:

$$\begin{cases} x(t_0) = x|_{t=t_0} = x_0 \\ x'(t_0) = x'|_{t=t_0} = x_1 \\ x^{(n-1)}(t_0) = x^{(n-1)}|_{t=t_0} = x_{(n-1)}, \end{cases} \quad (4)$$

где начальные данные

$$(t_0, x_0, \dots, x_{n-1}) \in G$$

- некоторой области, в которой определена функция $f(t, x, y_1, \dots, y_{n-1})$ в правой части (2).

Для д.у. (2) справедлива следующая теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Если в области G пространства $(n+1)$ измерения переменных $(t, x, y_1, \dots, y_{n-1})$ непрерывны функции

$$f(t, x, y_1, \dots, y_{n-1}), f'_x, f'_{y_1}, \dots, f'_{y_{n-1}}(t, x, y_1, \dots, y_{n-1}), \quad (5)$$

то для любой точки $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in G$ существует интервал (a, b) , содержащий t_0 , и функция $\varphi(t)$, имеющая на этом интервале производные до порядка n включительно, такие, что при всех $t \in (a, b)$ выполнены соотношения

$$\frac{d^n \varphi(t)}{dt^n} = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \quad (6)$$

$$\begin{cases} \varphi(t_0) = x_0 \\ \varphi'(t_0) = x_1 \\ \dots \\ \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases} \quad (7)$$

и для любой функции $\psi(t)$, определенной на $(a', b') \ni t_0$, для которой справедливы (6) и (7) с заменой φ на ψ

$$\begin{cases} (a', b') \subset (a, b) \\ \psi(t) = \varphi(t), \text{ при } t \in (a', b'). \end{cases}$$

Функция $\varphi(t)$ называется **непродолжаемым решением задачи Коши для уравнения (2) с начальными условиями (4)**.

Графически по-прежнему решение $x = \varphi(t)$ уравнения (2) можно изобразить в виде линии на плоскости (t, x) (рис. 12),

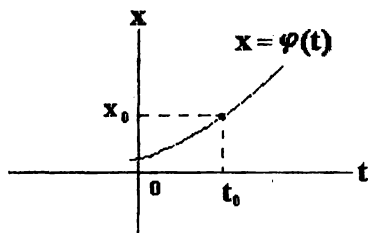


Рис. 12

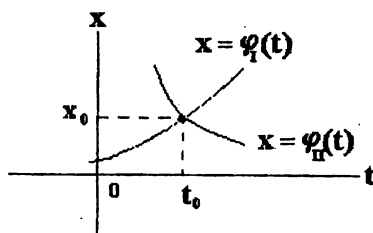


Рис. 13

но теперь допустима картина, изображенная на рис. 13.

Здесь $\varphi_I(t)$, $\varphi_{II}(t)$ - два решения уравнения вида (2) при $n \geq 2$, для которых

$$\begin{cases} \varphi_I(t_0) = \varphi_{II}(t_0) = x_0 \\ \varphi'_I(t_0) = x_1^{(I)} \neq \varphi'_{II}(t_0) = x_1^{(II)} \\ \dots \end{cases}$$

- начальные данные совпадают только в первых двух координатах. Для $n \geq 3$ допустима ситуация (рис. 14),

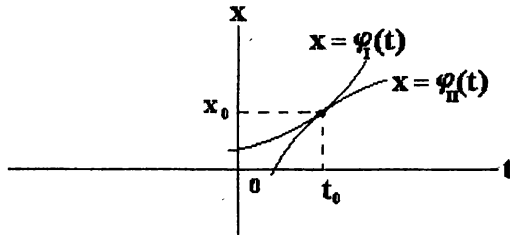


Рис. 14

когда

$$\begin{cases} \varphi_I(t_0) = \varphi_{II}(t_0) = x_0 \\ \varphi'_I(t_0) = x_1^{(I)} \neq \varphi'_{II}(t_0) = x_1^{(II)} \\ \varphi''_I(t_0) = x_2^{(I)} \neq \varphi''_{II}(t_0) = x_2^{(II)} \\ \dots \end{cases}$$

Например, для уравнения

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 0$$

два решения $\varphi_I(t) \equiv 0$ и $\varphi_{II}(t) = t^2$ таковы, что

$$\begin{cases} \varphi_I(0) = \varphi_{II}(0) = 0 \\ \varphi'_I(0) = \varphi'_{II}(0) = 0 \\ \varphi''_I(0) = 0 \neq \varphi''_{II}(0) = 2. \end{cases}$$

Для уравнения порядка $n \geq 2$ кроме задачи Коши для выделения конкретного решения можно использовать **краевые условия**, т. е. условия, задающие значения функции x на границе (краях) отрезка (a, b) .

Например, для уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0 \quad (8)$$

общим решением которого, как легко увидеть, является функция

$$x = \varphi(t, C_0, C_1) = C_0 \cos t + C_1 \sin t, \quad (9)$$

задание значений

$$x|_{t=0} = x_0, \quad x|_{t=\pi} = x_1 \quad (10)$$

приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} C_0 = x_0 \\ C_1 = x_1, \end{cases}$$

откуда единственным решением д.у. (8), удовлетворяющим краевым условиям (10), является функция

$$\varphi(t) = x_0 \cos t + x_1 \sin t.$$

Однако в случае краевой задачи (задачи нахождения решения д.у., удовлетворяющего краевым условиям) возникают ситуации, когда решений или нет, или их бесконечно много. Для того же д.у. (8) поиск решения, удовлетворяющего краевым условиям

$$x|_{t=0} = x_0 \neq 0, x|_{t=\pi} = 0,$$

приводит к несовместной системе

$$\begin{cases} C_0 = x_0 \neq 0 \\ 0 \\ -C_0 = 0. \end{cases}$$

А при краевых условиях

$$x|_{t=0} = 0, x|_{t=\pi} = 0$$

получаем

$$\begin{cases} C_0 = 0 \\ -C_0 = 0 \end{cases}$$

и $x = C_1 \sin t$ при любом C_1 удовлетворяет и уравнению и краевым условиям.

В отличие от уравнений первого порядка, дифференциальные уравнения второго порядка весьма редко удается свести к квадратурам. В некоторых случаях удается свести решение д.у. второго порядка к решению д.у. первого порядка. Рассмотрим два таких случая.

Первый:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(t; \frac{dx}{dt}) \quad (11)$$

- правая часть не содержит в явном виде функцию $x = x(t)$.

Замена $y = \frac{dx}{dt}$ приводит (11) к виду $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ и если удастся найти общее решение $y = \varphi(t, C_0)$ этого уравнения, то для x получаем

$$x = x(t) = \int \varphi(t; C_0) dt + C_1.$$

Второй:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = f(x; \frac{dx}{dt}) \quad (12)$$

- правая часть не содержит в явном виде независимое переменное t .

Если обозначить через y производную $\frac{dx}{dt}$ и считать независимым переменным уже x , то получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot y = f(x; y).$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}$$

и если общее решение этого уравнения есть

$$y = \varphi(x, C_0),$$

то получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x, C_0)$$

с разделяющимися переменными.

Рассмотрим примеры решения д.у. типа (11) и (12).

Пример 1.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{t} \frac{dx}{dt}. \quad (13)$$

Замена $y = \frac{dx}{dt}$ приводит д.у. (13) к уравнению

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t} y,$$

являющемуся уравнением с разделяющимися переменными. Очевидно, что $y \equiv 0$ есть решение этого уравнения. Тогда получаем

$$\frac{dx}{dt} = 0,$$

откуда

$$x \equiv C$$

- решение (13). Для $y \neq 0$, деля на y и умножая на dt , получим

$$\frac{1}{t} dt - \frac{1}{y} dy = 0,$$

откуда

$$\ln|t| - \ln|y| + \ln|C_1| = 0$$

или

$$y = \frac{dx}{dt} = C_1 t.$$

Здесь постоянную C из (19) главы 1 берем в виде $-\ln|C|$.
Теперь уже легко найти x :

$$x = \int C_1 t dt = C_1 \frac{t^2}{2} + C_2.$$

Так как C_1 - произвольная постоянная, то $\frac{C_1}{2}$ также произвольная постоянная и общее решение уравнения (13) можно записать как

$$x = C_1 t^2 + C_2. \quad (14)$$

Решение $x \equiv C$, найденное ранее, получается из (14) при $C_1 = 0$, $C_2 = C$. Формально в (14) следует считать $t \neq 0$, так как уравнение (13) при $t = 0$ не определено в том смысле, что имеет разрывный множитель $\frac{1}{t}$.

Пример 2. Теперь рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{x} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2. \quad (15)$$

Замена

$$\frac{dx}{dt} = y$$

и переход к независимой переменной x дает в силу

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot y$$

уравнение

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} y^2.$$

Это д.у., очевидно, имеет одним из решений функцию $y \equiv 0$, откуда

$$x \equiv C.$$

[Заметим, что так как для (15) обязательно $x \neq 0$, то в соотношении $x \equiv C$ следует считать $C \neq 0$].

Д.у.

$$y \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} y^2$$

при $y \neq 0$ равносильно уравнению

$$\frac{1}{x} dx - \frac{1}{y} dy = 0$$

- д.у. с разделяющимися переменными, откуда, как и в предыдущем примере,

$$y = C_1 x.$$

Итак,

$$\frac{dx}{dt} = C_1 x$$

- также уравнение с разделяющимися переменными и

$$\ln |x| = C_1 t + \ln |C_2|, C_2 \neq 0.$$

Окончательно

$$x = C_2 e^{C_1 t}, C_2 \neq 0.$$

При $C_1 = 0, C_2 = C \neq 0$ получаем ранее найденное решение $x \equiv C$.

4. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ n-го ПОРЯДКА

Очень важным классом дифференциальных уравнений порядка выше первого, для которого к тому же удастся построить полную теорию, является класс **линейных дифференциальных уравнений**.

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$a_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = b(t), \quad (1)$$

где

$$a_0(t) \neq 0. \quad (2)$$

Если $b(t) \equiv 0$, то уравнение

$$a_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0 \quad (3)$$

называется **однородным линейным дифференциальным уравнением n-го порядка**. При $b(t) \neq 0$ уравнение (1) называется **неоднородным**. Неоднородное уравнение (1) и однородное уравнение (3) называются соответствующими друг другу.

Мы будем изучать линейные дифференциальные уравнения второго порядка, то есть для $n = 2$. Этот случай принципиально мало чем отличается от общего. Итак, рассмотрим уравнения: неоднородное

$$a_0(t) \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2(t)x = b(t) \quad (4)$$

при

$$a_0(t) \neq 0$$

и соответствующее ему однородное

$$a_0(t) \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_2(t)x = 0. \quad (5)$$

В дальнейшем, не оговаривая, будем предполагать коэффициенты $a_0(t) \neq 0$, $a_1(t)$, $a_2(t)$ уравнений (4), (5) и правую часть $b(t)$ уравнения (4) непрерывными на некотором интервале (α, β) оси t функциями.

Уравнение (4) очевидно равносильно следующему

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)} \frac{dx}{dt} - \frac{a_2(t)}{a_0(t)} x + \frac{b(t)}{a_0(t)}. \quad (6)$$

Так как функция

$$f(t, x, y) = \frac{b(t)}{a_0(t)} - \frac{a_2(t)}{a_0(t)} x - \frac{a_1(t)}{a_0(t)} y \quad (7)$$

- правая часть д.у. (6) - непрерывна вместе с производными

$$f'_x = -\frac{a_2(t)}{a_0(t)}, \quad f'_y = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)}$$

в полосе $G = \{\alpha < t < \beta, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}$, то по теореме существования и единственности решения задачи Коши из предыдущего параграфа через любую точку

$$(t_0, x_0, x_1) \in G$$

«проходит» и притом единственное решение $x = \varphi(t)$ д.у. (6), то есть

$$\varphi''(t) = \frac{b(t)}{a_0(t)} - \frac{a_2(t)}{a_0(t)} \varphi(t) - \frac{a_1(t)}{a_0(t)} \varphi'(t), \quad t \in (\alpha, \beta) \quad (8)$$

и

$$\varphi(t_0) = x_0, \quad \varphi'(t_0) = x_1.$$

Пусть $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ - какие-то два решения однородного линейного дифференциального уравнения (5), то есть для всего $t \in (\alpha, \beta)$

$$\begin{cases} a_0(t) \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + a_1(t) \frac{d\varphi_1}{dt} + a_2(t)\varphi_1(t) = 0 \\ a_0(t) \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + a_1(t) \frac{d\varphi_2}{dt} + a_2(t)\varphi_2(t) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Тогда при любых постоянных C_1, C_2 функция

$$\varphi(t) = C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t) \quad (11)$$

- линейная комбинация решений $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ - также является решением д.у. (5), то есть при каждом $t \in (\alpha, \beta)$

$$a_0(t) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + a_1(t) \frac{d\varphi}{dt} + a_2(t)\varphi(t) = 0. \quad (12)$$

Соотношение (12) сразу следует из (10), если вспомнить, что

производная любого порядка от суммы функций есть сумма соответствующих производных от слагаемых и постоянный множитель можно выносить за знак производной любого порядка. Этим доказано, что множество решений однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка является **линейным пространством**.

В силу отмеченного выше свойства существования и единственности решения задачи Коши для д.у. (4), а следовательно и (5), однозначно определяются решения $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ д.у. (5), удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} \varphi_1(t_0) = 1, \varphi_1'(t_0) = 0 \\ \varphi_2(t_0) = 0, \varphi_2'(t_0) = 1. \end{cases} \quad (13)$$

Скажем, что система функций $h_1(t)$, $h_2(t)$ называется на интервале (α, β) **линейно независимой**, если из тождества

$$C_1 h_1(t) + C_2 h_2(t) \equiv 0, t \in (\alpha, \beta) \quad (14)$$

следует, что

$$C_1 = C_2 = 0. \quad (15)$$

Если же найдется набор чисел C_1 , C_2 , среди которых есть отличные от нуля, то есть

$$C_1^2 + C_2^2 > 0, \quad (16)$$

для которого

$$C_1 h_1(t) + C_2 h_2(t) \equiv 0, t \in (\alpha, \beta), \quad (17)$$

то система функций $h_1(t)$, $h_2(t)$ называется **линейно зависимой**.

Достаточно просто доказать следующее утверждение.

Теорема (о структуре общего решения однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка).

Система решений $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ однородного линейного дифференциального уравнения (5), удовлетворяющая условиям (13), является линейно независимой на (α, β) и для любого решения $\psi(t)$ д.у. (5) найдутся числа C_1 , C_2 , зависящие от ψ , такие, что при всех $t \in (\alpha, \beta)$

$$\psi(t) = C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t). \quad (18)$$

Действительно, пусть для любого $t \in (\alpha, \beta)$

$$C_1 \varphi_1(t) + C_2 \varphi_2(t) \equiv 0. \quad (19)$$

Дифференцируя по t на (α, β) это тождество, получим

$$C_1 \varphi_1'(t) + C_2 \varphi_2'(t) \equiv 0. \quad (20)$$

Подставим в (19), (20) значение $t = t_0$ и используем (13). Тогда

$$\begin{cases} 0 = C_1 \varphi_1(t_0) + C_2 \varphi_2(t_0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = C_1 \\ 0 = C_1 \varphi_1'(t_0) + C_2 \varphi_2'(t_0) = C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = C_2, \end{cases}$$

то есть $C_1 = C_2 = 0$ и система решений $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ линейно независима.

Пусть $\psi(t)$ - произвольное решение д.у. (5). Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \psi(t) - \psi(t_0) \cdot \varphi_1(t) - \psi'(t_0) \cdot \varphi_2(t). \quad (21)$$

Как линейная комбинация (трех) решений однородного линейного дифференциального уравнения (5) функция $\varphi(t)$ является также его решением. В силу (13), (21)

$$\varphi(t_0) = \psi(t_0) - \psi(t_0) \cdot \varphi_1(t_0) - \psi'(t_0) \cdot \varphi_2(t_0) = \psi(t_0) - \psi(t_0) \cdot 1 - \psi'(t_0) \cdot 0 = \psi(t_0) - \psi(t_0) = 0. \quad (22)$$

Дифференцируя по t на (α, β) соотношение (21), получим

$$\varphi'(t) = \psi'(t) - \psi(t_0) \cdot \varphi'_1(t) - \psi'(t_0) \cdot \varphi'_2(t).$$

$$\varphi'(t_0) = \psi'(t_0) - \psi(t_0) \cdot \varphi'_1(t_0) - \psi'(t_0) \cdot \varphi'_2(t_0) = \varphi'(t_0) =$$

$$= \psi'(t_0) - \psi'(t_0) \cdot 0 - \psi'(t_0) \cdot 1 = \psi'(t_0) - \psi'(t_0) = 0. \quad (23)$$

Полагая в этом равенстве $t = t_0$, получаем в силу (13)

Легко видеть, что $\psi(t) \equiv 0$ на (α, β) является решением д.у. (5), причем Таким образом, два решения $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ д.у. (5) удовлетворяют одним $\varphi(t_0) = 0, \psi'(t_0) = 0. \quad (24)$

начальным условиям - нулевым, что видно из (22) — (24). В силу единственности решения задачи Коши для д.у. (5) будем иметь для всех $t \in (\alpha, \beta)$

$$\varphi(t) \equiv \psi(t) \equiv 0.$$

Но по (21) это означает, что для всех $t \in (\alpha, \beta)$

$$\psi(t) = \psi(t_0) \cdot \varphi_1(t) + \psi'(t_0) \cdot \varphi_2(t),$$

то есть (18) с $C_1 = \psi(t_0), C_2 = \psi'(t_0)$. Этим теорема полностью доказывается.

Смысл доказанной теоремы в том, что решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ образуют **базис линейного пространства Π решений однородного линейного дифференциального уравнения (5).**

Как известно из линейной алгебры, любой базис линейного пространства имеет одно и то же (в данном случае 2) число элементов и для любых двух базисов $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$ и $\{\tilde{\varphi}_1(t), \tilde{\varphi}_2(t)\}$ существует матрица чисел

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \det C = C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} \neq 0$$

такая, что

$$\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1(t) \\ \tilde{\varphi}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

(коротко это записывается в виде

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_1(t) = C_{11}\varphi_1(t) + C_{12}\varphi_2(t) \\ \tilde{\varphi}_2(t) = C_{21}\varphi_1(t) + C_{22}\varphi_2(t) \end{cases}$$

Например, базисом пространства решений д.у. (5) наряду с $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$ будет $\{\tilde{\varphi}_1(t), \tilde{\varphi}_2(t)\}$, где

$$\tilde{\varphi}_1(t) = \varphi_1(t);$$

$$\tilde{\varphi}_2(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t), C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

β) Пусть $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ - какие-то два решения д.у. (5), то есть всюду на $(\alpha,$

Рассмотрим функцию

$$\begin{cases} a_0(t) \cdot \Phi_1''(t) + a_1(t) \cdot \Phi_1'(t) + a_2(t) \cdot \Phi_1(t) = 0 \\ a_0(t) \cdot \Phi_2''(t) + a_1(t) \cdot \Phi_2'(t) + a_2(t) \cdot \Phi_2(t) = 0. \end{cases} \quad (25)$$

$$W(t; \Phi_1, \Phi_2) = \begin{vmatrix} \Phi_1(t) & \Phi_2(t) \\ \Phi_1'(t) & \Phi_2'(t) \end{vmatrix} = \Phi_1(t) \Phi_2'(t) - \Phi_1'(t) \Phi_2(t), \quad (26)$$

называемую определителем Вронского для системы $\Phi_1(t)$ $\Phi_2(t)$.

Вычислим производную $W'(t) = W'(t; \Phi_1, \Phi_2)$ определителя Вронского. По правилам нахождения производной от суммы и произведения функций получим

$$\begin{aligned} W'(t) &= \Phi_1'(t) \Phi_2''(t) + \Phi_1(t) \Phi_2'''(t) - \Phi_2'(t) \Phi_1''(t) - \Phi_2(t) \Phi_1'''(t) = \\ &= \Phi_1(t) \Phi_2'''(t) - \Phi_2(t) \Phi_1'''(t). \end{aligned}$$

Подставим в это равенство значения $\Phi_1'''(t)$, $\Phi_2'''(t)$, найденные из (25), и используем (26). Получим

$$\begin{aligned} W'(t) &= \Phi_1(t) \left(-\frac{a_1(t)}{a_0(t)} \Phi_2'(t) - \frac{a_2(t)}{a_0(t)} \Phi_2(t) \right) - \Phi_2(t) \left(-\frac{a_1(t)}{a_0(t)} \Phi_1'(t) - \frac{a_2(t)}{a_0(t)} \Phi_1(t) \right) = \\ &= -\frac{a_1(t)}{a_0(t)} (\Phi_1(t) \Phi_2'(t) - \Phi_2(t) \Phi_1'(t)) - \frac{a_2(t)}{a_0(t)} (\Phi_1(t) \Phi_2(t) - \Phi_2(t) \Phi_1(t)) = \\ &= -\frac{a_1(t)}{a_0(t)} W(t). \end{aligned}$$

Таким образом, для $W(t)$ получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{a_1(t)}{a_0(t)} W. \quad (27)$$

с разделенными переменными

Если исключить неинтересный сейчас случай $W(t) = 0$, то (27) можно

переписать в виде

$$\frac{1}{W} dW + \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt = 0,$$

$$\ln|W| + \int_{t_0}^t \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)} d\tau - \ln|C|. \quad (28)$$

откуда

Здесь в качестве первообразной для $\frac{a_1(t)}{a_0(t)}$ взят определенный интеграл с переменным верхним пределом, так как

$$\left(\int_{t_0}^t \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)} d\tau \right)' = \frac{a_1(t)}{a_0(t)}.$$

$$W(t) = Ce^{-\int_{t_0}^t \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)} d\tau}. \quad (29)$$

Из (28) следует, что
Если в (29) положить $t = t_0$, то получим

$$W(t_0) = Ce^{-\int_{t_0}^{t_0} \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)} d\tau} = Ce^0 = C \cdot 1 = C.$$

$$W(t) = W(t_0) e^{-\int_{t_0}^t \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)} d\tau}. \quad (30)$$

Таким образом, по (29) имеем

В (30) значение t_0 - произвольное в (α, β) . Формула (30) позволяет установить справедливость следующего утверждения.

Теорема (о свойстве определителя Вронского для системы решений однородного линейного дифференциального уравнения).

Если определитель Вронского для системы решений однородного линейного дифференциального уравнения (второго порядка) равен нулю в одной какой-либо точке t_0 из (α, β) , то он тождественно равен нулю на всем интервале (α, β) .

Отсюда сразу следует, что если $W(t) \neq 0$ хотя бы в одной точке t_0 из (α, β) , то $W(t) \neq 0$ при всех $t \in (\alpha, \beta)$.

Нетрудно показать, что если система $\Phi_1(t), \Phi_2(t)$ решений д.у. (5) линейно зависима, то $W(t; \Phi_1, \Phi_2) \equiv 0$, если же $W(t; \Phi_1, \Phi_2) \neq 0$, то система решений $\Phi_1(t), \Phi_2(t)$ д.у. (5) линейно независима и образует базис

пространства $\mathbb{M}$ решений этого д.у.

Отметим еще один любопытный факт: определитель Вронского не зависит от коэффициента $a_2(t)$ уравнения (5). Так как формула (30) справедлива и для д.у. (3) произвольного порядка n , то $W(t)$ не зависит от всех коэффициентов, кроме $a_0(t)$ и $a_1(t)$. Заметим, что для д.у. (3) определитель Вронского определяется как

$$\begin{vmatrix} \Phi_1(t) & \dots & \Phi_n(t) \\ \Phi_1'(t) & \dots & \Phi_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \Phi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \Phi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} a_0(t) \cdot \psi_1''(t) + a_1(t) \cdot \psi_1' + a_2(t) \cdot \psi_1 = b(t) \\ a_0(t) \cdot \psi_2''(t) + a_1(t) \cdot \psi_2' + a_2(t) \cdot \psi_2 = b(t), \end{cases}$$

где $\Phi_1(t), \dots, \Phi_n(t)$ - решения д.у. (3).

Перейдем теперь к изучению линейного неоднородного дифференциального уравнения (4).

Если $\psi_1(t), \psi_2(t)$ - два решения д.у. (4), то есть для любого t из (α, β)

$$a_0(t)(\psi_1(t) - \psi_2(t))'' + a_1(t)(\psi_1(t) - \psi_2(t))' + a_2(t)(\psi_1(t) - \psi_2(t)) = 0. \quad (31)$$

$$a_0(t)\varphi''(t) + a_1(t)\varphi'(t) + a_2(t)\varphi(t) = 0, \quad (32)$$

то, вычитая одно равенство из другого, получим

$$a_0(t)(\psi_1''(t) - \psi_2''(t)) + a_1(t)(\psi_1'(t) - \psi_2'(t)) + a_2(t)(\psi_1(t) - \psi_2(t)) = b(t) - b(t) = 0$$

или

Если обозначить через $\varphi(t)$ разность $\psi_1(t) - \psi_2(t)$, то (31) есть то есть $\varphi(t)$ является решением однородного линейного дифференциального уравнения (5). Это доказывает следующее утверждение.

Теорема (о структуре общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения).

$$\psi(t) = \psi^*(t) + C_1\varphi_1(t) + C_2\varphi_2(t). \quad (33)$$

Если $\psi^*(t)$ — какое-либо решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка (4), а решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ образуют базис пространства решений соответствующего однородного уравнения (5), то для произвольного решения $\psi(t)$ неоднородного д.у. (4) найдутся числа C_1, C_2 , зависящие от $\psi(t)$ (и от $\psi^*(t)$), $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ такие, что для любого t из (α, β)

$$\psi^*(t) = C_1(t)\varphi_1(t) + C_2(t)\varphi_2(t), \quad (34)$$

Теперь мы покажем, что при известных решениях $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ однородного линейного дифференциального уравнения (5), образующих линейно независимую систему (базис), можно найти частное решение (t) неоднородного уравнения (4).

Используем для этого **метод Лагранжа вариации постоянных**.

$$\psi^{**}(t) = C'_1(t)\varphi_1(t) + C'_2(t)\varphi_2(t) + C_1(t)\varphi'_1(t) + C_2(t)\varphi'_2(t). \quad (35)$$

Решение $\psi^*(t)$ будем искать в виде

$$C'_1(t)\varphi_1(t) + C'_2(t)\varphi_2(t) = 0. \quad (36)$$

$$\psi^{**}(t) = C_1(t)\varphi'_1(t) + C_2(t)\varphi'_2(t). \quad (37)$$

$$\psi^{***}(t) = C'_1(t)\varphi'_1(t) + C'_2(t)\varphi'_2(t) + C_1(t)\varphi''_1(t) + C_2(t)\varphi''_2(t). \quad (38)$$

где $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ - базис пространства решений д.у. (5).

Так как вместо одной неизвестной функции ($\psi^*(t)$) вводятся две неизвестные функции ($C_1(t)$, $C_2(t)$), то на них можно наложить одно условие.

Вычислим производную $\psi^{**}(t)$:

Потребуем выполнения условия

По (35) и (36)

Из (37)

Подставим выражения для $\psi^*(t)$, $\psi^{**}(t)$, $\psi^{***}(t)$ из (34), (37), (38) в (4). Получим

$$\begin{aligned} a_0(t)\psi^{***}(t) + a_1(t)\psi^{**}(t) + a_2(t)\psi^*(t) &= a_0(t)(C'_1(t)\varphi'_1(t) + C'_2(t)\varphi'_2(t)) + \\ &+ a_0(t)(C_1(t)\varphi''_1(t) + C_2(t)\varphi''_2(t)) + a_1(t)(C_1(t)\varphi'_1(t) + C_2(t)\varphi'_2(t)) + \\ &C'_1(t)\varphi'_1(t) + C'_2(t)\varphi'_2(t) = \frac{b(t)}{a_0(t)}. \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} + a_2(t)(C_1(t)\varphi_1(t) + C_2(t)\varphi_2(t)) &= a_0(t)(C'_1(t)\varphi'_1(t) + C'_2(t)\varphi'_2(t)) + \\ \begin{cases} C'_1(t)\varphi_1(t) + C'_2(t)\varphi_2(t) = 0 \\ C'_1(t)\varphi'_1(t) + C'_2(t)\varphi'_2(t) = \frac{b(t)}{a_0(t)}. \end{cases} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} + C_1(t)(a_0(t)\varphi''_1(t) + a_1(t)\varphi'_1(t) + a_2(t)\varphi_1(t)) &+ C_2(t)(a_0(t)\varphi''_2(t) + a_1(t)\varphi'_2(t) + \\ + a_2(t)\varphi_2(t)) &= a_0(t)(C'_1(t)\varphi'_1(t) + C'_2(t)\varphi'_2(t)) + C_1(t) \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = \\ &= a_0(t)(C'_1(t)\varphi'_1(t) + C'_2(t)\varphi'_2(t)) = b(t), \end{aligned}$$

откуда

При выводе (39) использовано то, что $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ - решения (5). Объединим (36) и (39) в систему

Относительно $C'_1(t)$, $C'_2(t)$ система (40) - линейная система с

$$\begin{cases} C'_1(t) = -\frac{\frac{b(t)}{a_0(t)}\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t)} \\ C'_2(t) = \frac{\frac{b(t)}{a_0(t)}\varphi_1(t)}{\varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t)} \end{cases} \quad (41)$$

определителем

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t), \quad (42)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \frac{1}{\sin t}.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0. \quad (43)$$

являющаяся **определителем Вронского для системы $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$** - базисной системы решений д.у. (5). Поэтому при всех t из (α, β)

$$\varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\varphi_1'(t) \neq 0$$

и

Из (41) функции $C_1(t)$, $C_2(t)$ находятся как первообразные правых частей. По (34) определяем частное решение $\psi^*(t)$ д.у. (4).

$$\begin{cases} C'_1(t) \cos t + C'_2(t) \sin t = 0 \\ -C'_1(t) \sin t + C'_2(t) \cos t = \frac{1}{\sin t} \end{cases} \quad (44)$$

Рассмотрим следующий пример. Решить уравнение

Соответствующее (42) однородное уравнение есть

Легко проверить, что функции $\varphi_1(t) = \cos t$, $\varphi_2(t) = \sin t$ являются линейно независимой системой решений однородного уравнения (43). Определитель Вронского этой системы решений

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \cos t(\sin t)' - \sin t(\cos t)' = \cos^2 t + \sin^2 t \equiv 1.$$

Система Лагранжа (40) принимает вид

Умножим первое уравнение системы (44) на $\cos t$, второе - на $(-\sin t)$ и сложим результаты. Получим

$$C'_1(t)(\cos^2 t + \sin^2 t) = \frac{1}{\sin t} (-\sin t)$$

или

$$C'_1(t) = -1,$$

откуда $C_1(t) = -t$ (можно брать любую первообразную).

Умножим первое уравнение системы (44) на $\sin t$, второе на $\cos t$ и сложим результаты. Получим

$$C'_2(t)(\sin^2 t + \cos^2 t) = \frac{\cos t}{\sin t}$$

или

$$C'_2(t) = \frac{\cos t}{\sin t},$$

откуда

$$C_2(t) = \ln |\sin t|.$$

$$\varphi_1(t)\varphi'_2(t) - \varphi_2(t)\varphi'_1(t) = (\varphi_1(t_0)\varphi'_2(t_0) - \varphi_2(t_0)\varphi'_1(t_0)) e^{-\int_{t_0}^t \frac{a_1(\tau)}{a_0(\tau)} d\tau}, \quad (45)$$

Окончательно

$$\psi^*(t) = -t \cos t + (\ln |\sin t|) \sin t.$$

Общее решение неоднородного д.у. (42) по (33) имеет вид

$$\psi(t) = (C_1 - t) \cos t + (C_2 + \ln |\sin t|) \sin t.$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + x = 0. \quad (46)$$

В качестве интервала (α, β) можно брать любой интервал вида $(\pi k; \pi(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$, на котором $\sin t \neq 0$.

Таким образом, все сводится к задаче нахождения двух линейно независимых решений однородного уравнения (5).

Так как по (26), (30) то при известном $\varphi_1(t)$ для $\varphi_2(t)$ получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка (45). Заметим, что решения д.у. (5) определяются с точностью до постоянного множителя, так что не ограничивая области можно считать, что

$$W(t_0) = \varphi_1(t_0)\varphi'_2(t_0) - \varphi_2(t_0)\varphi'_1(t_0) = 1.$$

Для иллюстрации рассмотрим решение уравнения

Очевидно, что одним решением этого уравнения является функция

$$\varphi_1(t_0) = e^t ((e^t)'' - 2(e^t)' + e^t = e^t - 2e^t + e^t = 0). \text{ Далее,}$$

$$W(t) = e^{\int_0^t (-2) d\tau} = e^{2t}.$$

Уравнение (45) принимает вид

$$e^t \varphi_2'(t) - e^t \varphi_2(t) = e^{2t}$$

или после сокращения на $e^t \neq 0$

$$\varphi_2'(t) - \varphi_2(t) = e^t.$$

Положим $\varphi_2(t) = u \cdot v$, где для v получим уравнение

$$\frac{dv}{dt} - v = 0,$$

откуда $v = e^t$. Для определения u получаем уравнение $e^t \frac{du}{dt} = e^t$ или $\frac{du}{dt} =$

1. Таким образом, $u = t + C$, а $\varphi_2(t) = (t + C)e^t$. Из условия $W(0) = 1$ получим

$$1 = \varphi_1(0)\varphi_2'(0) - \varphi_2(0)\varphi_1'(0) = 1 \cdot (C + 1) - C \cdot 1 = 1$$

$$a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = b(t), \quad (1)$$

$$a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \quad (2)$$

при любом C . Поэтому выберем $C = 0$, откуда

$$\varphi_2(t) = te^t.$$

Таким образом, общее решение (46) есть

$$\varphi(t) = C_1 e^t + C_2 te^t = (C_1 + C_2 t) e^t. \quad (3)$$

Все утверждения данного параграфа легко переносятся на общий случай уравнений n -го порядка вида (4) и (5).

5. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Особое место занимает теория линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, то есть уравнений вида

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (4)$$

называемого **характеристическим уравнением**.

Многочлен в левой части этого уравнения

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n \quad (5)$$

называется при этом **характеристическим многочленом**.

Остановимся на изучении наиболее простого, но и чаще всего встречающегося случая уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами вида

$$a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = b(t) \quad (6)$$

и

$$a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0. \quad (7)$$

Характеристическое уравнение (4) в случае $n = 2$ превращается в квадратное

$$a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0, \quad (8)$$

подробно изучаемое еще в школьном курсе алгебры.

Принципиально возможны три случая, которые мы и разберем.

1°. Дискриминант уравнения (8), то есть

$$D = a_1^2 - 4a_0 a_2 > 0. \quad (9)$$

В этом случае уравнение (8) имеет два различных действительных корня

$$\lambda_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}, \quad \lambda_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0} \quad (10)$$

(при $a_0 > 0$, что всегда можно сделать, $\lambda_1 < \lambda_2$).

По (3) и (4) решениями д.у. (7) будут функции

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}. \quad (11)$$

Легко понять, что они линейно независимы: если

$$C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \equiv 0 \text{ при } t \in (-\infty; +\infty) \text{ (или } t \in (\alpha; \beta)),$$

то

$$C_1 + C_2 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \equiv 0,$$

откуда $C_1 = C_2 = 0$. Достаточно, чтобы $C_1 + C_2 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}$ обращалось в нуль в любых двух различных точках $t_0^{(1)}, t_0^{(2)}$.

Линейная независимость решений (11) следует и из рассмотрения

определителя Вронского

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ (e^{\lambda_1 t})' & (e^{\lambda_2 t})' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \neq 0$$

при любых $t \in (-\infty; +\infty)$.

Таким образом при условии (9) общее решение однородного уравнения (7) имеет вид

$$\varphi(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (12)$$

где λ_1, λ_2 вычислены по (10).

2^б. Дискриминант уравнения (8)

$$D = a_1^2 - 4a_0 a_2 = 0. \quad (13)$$

В этом случае уравнение (8) имеет совпадающие корни

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2a_0}. \quad (14)$$

Одним решением д.у. (7) будет функция

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t}.$$

Вторую функцию-решение находим как при решении уравнения (46) из предыдущего параграфа:

$$\varphi_2(t) = t \cdot e^{\lambda_1 t}.$$

То, что $\varphi_2(t)$ - решение (7) можно проверить и непосредственно

$$\varphi_2'(t) = (t \cdot e^{\lambda_1 t})' = (\lambda_1 t + 1) e^{\lambda_1 t},$$

$$\varphi_2''(t) = ((\lambda_1 t + 1) e^{\lambda_1 t})' = (\lambda_1^2 t + 2\lambda_1) e^{\lambda_1 t},$$

$$a_0(t \cdot e^{\lambda_1 t})'' + a_1(t \cdot e^{\lambda_1 t})' + a_2 = (a_0(\lambda_1^2 t + 2\lambda_1) + a_1(\lambda_1 t + 1) + a_2) e^{\lambda_1 t} =$$

$$= ((a_0 \lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_2)t + (2a_0 \lambda_1 + a_1)) e^{\lambda_1 t} = (0 + 2a_0 \cdot (-\frac{a_1}{2a_0} + a_1)) \cdot e^{\lambda_1 t} =$$

$$= (0 + 0) \cdot e^{\lambda_1 t} = 0.$$

Решения $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ линейно независимы

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & t e^{\lambda_1 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & (\lambda_1 t + 1) e^{\lambda_1 t} \end{vmatrix} = (\lambda_1 t + 1) \cdot e^{2\lambda_1 t} - \lambda_1 t \cdot e^{2\lambda_1 t} = e^{2\lambda_1 t} \neq 0$$

при $t \in (-\infty; +\infty)$.

Общее решение д.у. (7) при условии (13) имеет вид

$$\varphi(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t} = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{a_1 - 1}{2a_0} t}. \quad (15)$$

3^о. Дискриминант уравнения (8)

$$D = a_1^2 - 4a_0a_2 < 0. \quad (16)$$

Покажем, что решениями уравнения (7) в этом случае будут функции

$$\varphi_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t; \varphi_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad (17)$$

где

$$\alpha = -\frac{a_1}{2a_0}; \beta = \frac{\sqrt{4a_0a_2 - a_1^2}}{2a_0}. \quad (18)$$

Непосредственно имеем

$$\varphi_1'(t) = (\alpha \cos \beta t - \beta \sin \beta t) e^{\alpha t}; \varphi_2'(t) = (\beta \cos \beta t + \alpha \sin \beta t) e^{\alpha t};$$

$$\varphi_1''(t) = ((\alpha^2 - \beta^2) \cos \beta t - 2\alpha\beta \sin \beta t) e^{\alpha t}; \varphi_2''(t) = (2\alpha\beta \cos \beta t + (\alpha^2 - \beta^2) \sin \beta t) e^{\alpha t}.$$

Таким образом,

$$a_0 \varphi_1''(t) + a_1 \varphi_1'(t) + a_2 \varphi_1(t) = ((a_0(\alpha^2 - \beta^2) + a_1\alpha + a_2) \cos \beta t - (a_0 2\alpha\beta + a_1\beta) \sin \beta t) e^{\alpha t} =$$

$$= ((a_0 \frac{2a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_0} - \frac{a_1^2}{2a_0} + a_2) \cos \beta t - \beta(2a_0(-\frac{a_1}{2a_0}) + a_1) \sin \beta t) e^{\alpha t} =$$

$$= (0 \cdot \cos \beta t - 0 \cdot \sin \beta t) e^{\alpha t} = 0.$$

$$\text{Аналогично и } a_0 \varphi_2''(t) + a_1 \varphi_2'(t) + a_2 \varphi_2(t) = 0.$$

Решения (17) очевидным образом линейно независимы. Следовательно, общее решение д.у. (7) при условии (16) имеет вид

$$\varphi(t) = (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) e^{\alpha t}, \quad (19)$$

где α, β вычисляются по (18).

Объединим (12), (15), (19) в один блок. Общее решение д.у.

$$a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0$$

есть

$$\left\{ \begin{array}{ll} C_1 e^{\frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0} t} + C_2 e^{\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_0} t} & \text{при } a_1^2 - 4a_0a_2 > 0 \\ (C_1 + C_2 t) e^{\frac{-a_1}{2a_0} t} & \text{при } a_1^2 - 4a_0a_2 = 0 \\ (C_1 \cos \frac{\sqrt{4a_0a_2 - a_1^2}}{2a_0} t + C_2 \sin \frac{\sqrt{4a_0a_2 - a_1^2}}{2a_0} t) e^{\frac{-a_1}{2a_0} t} & \text{при } a_1^2 - 4a_0a_2 < 0. \end{array} \right.$$

Для однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (1) частное решение $\psi^*(t)$ можно не

искать методом вариации постоянных, а получить с помощью **интеграла Дюамеля**

$$\psi^*(t) = \frac{1}{a_0} \int_0^t g(t-\tau) b(\tau) d\tau, \quad (20)$$

где $g(t)$ - решение соответствующего однородного д.у. (2), удовлетворяющее специальным - импульсным начальным условиям

$$g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n-2)}(0) = 0; \quad g^{(n-1)}(0) = 1. \quad (21)$$

Для уравнения второго порядка это особенно просто

$$\begin{cases} a_0 g''(t) + a_1 g'(t) + a_2 g(t) = 0 \\ g(0) = 0, \quad g'(0) = 1. \end{cases} \quad (22)$$

Для иллюстрации рассмотрим простой пример: найти частное решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = t. \quad (23)$$

Соотношения (22) в этом случае принимают вид

$$\begin{cases} g''(t) + g(t) = 0 \\ g(0) = 0, \quad g'(0) = 1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} (C_1 \cos t + C_2 \sin t)|_{t=0} = C_1 = 0 \\ (C_1 \cos t + C_2 \sin t)'|_{t=0} = C_2 = 1. \end{cases}$$

Таким образом,

$$g(t) = \sin t$$

и по (20)

$$\psi^*(t) = \int_0^t \sin(t-\tau) \tau d\tau = (\tau(\cos(t-\tau) + \sin(t-\tau)))|_{\tau=0}^{\tau=t} = t - \sin t. \quad (24)$$

Общее решение д.у. (23) будет

$$\varphi(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + (t - \sin t) = t + C_1 \cos t + (C_2 - 1) \sin t.$$

Так как C_2 - произвольная постоянная, то $(C_2 - 1)$ также произвольная постоянная и можно писать

$$\varphi(t) = t + C_1 \cos t + C_2 \sin t. \quad (25)$$

Видно, что для $\psi^*(t)$ из (24) выполнены условия

$$\begin{cases} \psi^*(0) = (t - \sin t)|_{t=0} = 0 \\ \psi^{*'}(0) = (t - \sin t)'|_{t=0} = (1 - \cos t)|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Это не случайность - для интеграла Дюамеля (20) и в общем случае

$$\psi^*(0) = \psi^{*'}(0) = \dots = \psi^{*(n-1)}(0) = 0. \quad (26)$$

Таким образом, интеграл Дюамеля является решением неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (1), удовлетворяющим нулевым начальным условиям.

Часто правая часть линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами представляет собой так называемый **квазимногочлен**, то есть функцию вида

$$e^{\mu t}((A_0 t^k + A_1 t^{k-1} + \dots + A_k) \cdot \cos vt + (B_0 t^l + B_1 t^{l-1} + \dots + B_l) \cdot \sin vt) = b(t; \mu, \nu, k, l). \quad (27)$$

Легко понять, что производные и первообразные любого порядка от $b(t; \mu, \nu, k, l)$ имеют такой же вид - меняются лишь числа k, l и, разумеется, коэффициенты многочленов. Поэтому частное решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (опять ограничимся случаем $n = 2$) можно искать, когда правая часть - квазимногочлен (27) в виде

$$\psi^*(t) = e^{\mu t}((C_0 t^N + C_1 t^{N-1} + \dots + C_N) \cdot \cos vt + (D_0 t^N + D_1 t^{N-1} + \dots + D_N) \cdot \sin vt), \quad (28)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \max\{k; l\} \\ s = 0, \text{ если } (a_0(\mu^2 - \nu^2) + a_1\mu + a_2)^2 + \nu^2(2a_0\mu + a_1)^2 > 0 \\ s = 1, \text{ если } \nu = 0, \mu = \lambda_1 \text{ или } \mu = \lambda_2, \text{ а } D = a^2 - 4a_0a_2 > 0, \\ \quad \text{а также если } (a_0(\mu^2 - \nu^2) + a_1\mu + a_2)^2 + \nu^2(2a_0\mu + a_1)^2 = 0 \text{ при } \nu > 0 \\ s = 2, \text{ если } \nu = 0, D = 0 \text{ и } \mu = -\frac{a_1}{2a_0} \end{array} \right. \quad (29)$$

$C_0, C_1, \dots, C_N, D_0, D_1, \dots, D_N$ - неопределенные коэффициенты.

Подстановка (28) в уравнение

$$a_0 \frac{d^2 \psi^*}{dt^2} + a_1 \frac{d\psi^*}{dt} + a_2 \psi^* = e^{\mu t}((A_0 t^k + A_1 t^{k-1} + \dots + A_k) \cdot \cos vt + (B_0 t^l + B_1 t^{l-1} + \dots + B_l) \cdot \sin vt)$$

и сравнение коэффициентов при одинаковых членах слева и справа (после приведения подобных членов в левой части данного уравнения) приводит к линейной системе $2(N+1)$ алгебраических уравнений, имеющей единственное решение.

Проиллюстрируем сказанное примером.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - x = 2e^t. \quad (30)$$

Решить уравнение

В правой части - квазимногочлен вида (27), где $\mu = 1, \nu = 0, k = 0, l = 0, A_0 = 2, B_0 = 0$.

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$.

Очевидно, что $N = \max\{0; 0\} = 0$ и $s = 1$, так как $v = 0$, $\mu = \lambda_2$, $a_1^2 - 4a_0a_2 = 4 > 0$ [см. (29)]. Таким образом

$$\psi^*(t) = C_0 \cdot t \cdot e^t, \psi^{**}(t) = C_0 \cdot (t + 1) \cdot e^t, \psi^{***}(t) = C_0 \cdot (t + 2) \cdot e^t$$

и

$$\psi^{***}(t) - \psi^*(t) = C_0 \cdot (t + 2) \cdot e^t - C_0 \cdot t \cdot e^t = 2 \cdot C_0 \cdot e^t = 2 \cdot e^t,$$

откуда $C_0 = 1$. Следовательно, $\psi^*(t) = t \cdot e^t$, а общее решение уравнения (30) есть

$$\varphi(t) = te^t + C_1 e^{-t} + C_2 e^t.$$

Если правая часть д.у. (1) есть сумма двух (или нескольких)

$$b(t) = b_I(t; \nu_1, \mu_1, k_1, l_1) + b_{II}(t; \nu_2, \mu_2, k_2, l_2) = b_I(t) + b_{II}(t), \quad (31)$$

квазимногочленов

то частное решение $\psi^*(t)$ д.у. (1) можно считать суммой $\psi_I^*(t) + \psi_{II}^*(t)$ частных решений уравнений

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_n x = b_I(t), a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + \dots + a_n x = b_{II}(t)$$

соответственно. Действительно,

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n}{dt^n} (\psi_I^*(t) + \psi_{II}^*(t)) + \dots + a_n (\psi_I^*(t) + \psi_{II}^*(t)) &= (a_0 \frac{d^n \psi_I^*(t)}{dt^n} + \dots + a_n \psi_I^*(t)) + \\ &+ (a_0 \frac{d^n \psi_{II}^*(t)}{dt^n} + \dots + a_n \psi_{II}^*(t)) = b_I(t) + b_{II}(t), \end{aligned}$$

так как производная любого порядка суммы функций есть сумма соответствующих производных слагаемых.

Свойство решений линейного дифференциального уравнения (не обязательно с постоянными коэффициентами)

$$\psi^*(t) = \psi_I^*(t) + \psi_{II}^*(t),$$

если $b(t) = b_I(t) + b_{II}(t)$, называется **принципом суперпозиции решений**.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий сказанное. Решить д.у.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 5 \frac{dx}{dt} = 3t^2 + \sin 5t. \quad (32)$$

$b_I(t) = 3t^2$ есть квазимногочлен с $\nu_1 = 0$, $\mu_1 = 0$, $k_1 = 2$, $l_1 = 0$, $A_0^{(1)} = 3$, $A_1^{(1)} = 0$, $A_2^{(1)} = 0$, $B_0^{(1)} = 0$.

$b_{II}(t) = \sin 5t$ есть квазимногочлен с $\mu_2 = 0$, $\nu_2 = 5$, $k_2 = 0$, $l_2 = 0$, $A_0^{(2)} = 0$, $B_0^{(2)} = 1$.

Как было указано выше,

$$\psi^*(t) = \psi_I^*(t) + \psi_{II}^*(t) = t(C_0^{(1)}t^2 + C_1^{(1)}t + C_2^{(1)}) + (C_0^{(2)}\cos 5t + D_0^{(2)}\sin 5t). \quad (33)$$

Действительно, характеристическое уравнение для (32) имеет вид

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0,$$

$$\begin{cases} \psi^{**}(t) = 3C_0^{(1)t^2} + 2C_1^{(1)t} + C_2^{(1)} + (-5C_0^{(2)}\sin 5t + 5D_0^{(2)}\cos 5t) \\ \psi'''(t) = 6C_0^{(1)t} + 2C_1^{(1)} + (-25C_0^{(2)}\cos 5t - 25D_0^{(2)}\sin 5t). \end{cases}$$

то есть $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$. Таким образом, $s_1 = 1$ ($v_1 = 0, \lambda_1 = \mu_1, a_1^2 - 4a_0a_2 = (-5)^2 > 0$), $s_2 = 0$ ($(a_0(\mu_2^2 - v_2^2) + a_1\mu_2 + a_2)^2 + v_2^2(2a_0\mu_2 + a_1)^2 = (-25)^2 + (25)^2(-5)^2 > 0$).

Таким образом,

$$\begin{cases} -15C_0^{(1)} = 3 \\ 6C_0^{(1)} - 10C_1^{(1)} = 0 \\ 25D_0^{(2)} = 1 \\ 2C_1^{(1)} - 5C_2^{(1)} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -25C_0^{(2)} - 25D_0^{(2)} = 0 \\ 25C_0^{(2)} = - \end{cases} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \psi'''(t) - 5\psi''(t) &= -15C_0^{(1)}t^2 + (6C_0^{(1)} - 10C_1^{(1)})t + (2C_1^{(1)} - 5C_2^{(1)}) + (-25C_0^{(2)} \\ &- 25D_0^{(2)})\cos 5t + (25C_0^{(2)} - 25D_0^{(2)})\sin 5t = 3t^2 + \sin 5t, \end{aligned}$$

откуда

Из систем (34) получаем почти сразу

$$C_0^{(1)} = -\frac{1}{5}; C_0^{(1)} = -\frac{3}{25}; C_2^{(1)} = -\frac{6}{125}; C_0^{(2)} = \frac{1}{50}; D_0^{(2)} = -\frac{1}{50}.$$

Таким образом,

$$\psi^*(t) = -\frac{1}{125}(25t^3 + 15t^2 + 6t) + \frac{1}{50}(\cos 5t - \sin 5t),$$

и общее решение для д.у. (32) есть

$$\varphi(t) = C_1 + C_2 e^{5t} - \frac{1}{125}(25t^3 + 15t^2 + 6t) + \frac{1}{50}(\cos 5t - \sin 5t).$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_2(t) \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_n(t) \end{cases} \quad (1)$$

6. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$, где

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - постоянная матрица, а функции $b_1(t), \dots, b_n(t)$ считаем непрерывными на $(\alpha; \beta)$.

Система (1) называется **линейной неоднородной системой**

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = b(t), \quad a_0 \neq 0. \quad (2)$$

$$\dot{x}_1 = x; \quad x_2 = \frac{dx}{dt}; \quad \dots; \quad x_n = \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n \\ \frac{dx_n}{dt} = -\frac{a_n}{a_0} x_1 - \frac{a_{n-1}}{a_0} x_2 - \dots - \frac{a_1}{a_0} x_n + b(t). \end{array} \right. \quad (4)$$

дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Если $b_1(t) = \dots = b_n(t) = 0$ для всех $t \in (\alpha; \beta)$, то система (1) называется **однородной**.

К системе (1) легко сводится линейное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2(t). \end{array} \right. \quad (5)$$

Достаточно положить

Получаем

Разумеется, и линейное дифференциальное уравнение n -го порядка с переменными коэффициентами сводится к системе вида (4), естественно также с переменными коэффициентами. Вообще можно

строить теорию линейных систем с переменными коэффициентами, но мы ограничимся изучением лишь систем с постоянными коэффициентами, причем для частного случая $n = 2$, то есть систем

Покажем, что не только уравнение второго порядка вида (2) сводится к системе вида (5), но и наоборот - система (5) может быть сведена к уравнению вида (2). Для этого продифференцируем первое,

например, уравнение из (5) по t и подставим в результат $\frac{dx_1}{dt}$ и $\frac{dx_2}{dt}$ из (5). Получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= a_{11} \frac{dx_1}{dt} + a_{12} \frac{dx_2}{dt} + b'_1(t) = \\ &= a_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1(t)) + a_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2(t)) + b'_1(t) = \\ &= (a_{11}^2 + a_{12}a_{21})x_1 + (a_{11} + a_{22})a_{12}x_2 + a_{11}b_1(t) + a_{12}b_2(t) + b'_1(t). \\ \frac{d^2 x_1}{dt^2} - (a_{11} + a_{22}) \frac{dx_1}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 &= -a_{22}b_1(t) + a_{12}b_2(t) + b'_1(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь подставим в последнее выражение значение

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} - (a_{11} + a_{22}) \frac{dx_1}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{21}b_1(t) - a_{11}b_2(t) + b'_2(t). \quad (7)$$

полученное из первого уравнения в (5). В итоге будем иметь

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - (a_{11} + a_{22}) \frac{dx}{dt} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x = 0. \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= (a_{11}^2 + a_{12}a_{21})x_1 + (a_{11} + a_{22})\left(\frac{dx_1}{dt} - a_{11}x_1 - b_1(t)\right) + a_{11}b_1(t) + a_{12}b_2(t) + \\ &\quad \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) = C_{11}e^{\lambda_1 t} + C_{21}e^{\lambda_2 t} \\ x_2 = \varphi_2(t) = C_{12}e^{\lambda_1 t} + C_{22}e^{\lambda_2 t}, \\ b'_1(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0, \quad (10)$$

или

Разумеется, при выводе (6) считаем, что существует $b'_1(t)$.

Если дифференцировать второе уравнение в (5) и исключить x_1 , то получим

Как видно из (6) и (7), однородные уравнения для функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ получаются одинаковыми:

Следовательно, общие решения в случае однородной системы (5),

$$\begin{cases} C_{11}\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_{21}\lambda_2 e^{\lambda_2 t} = a_{11}(C_{11}e^{\lambda_1 t} + C_{21}e^{\lambda_2 t}) + a_{12}(C_{12}e^{\lambda_1 t} + C_{22}e^{\lambda_2 t}) \\ C_{12}\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_{22}\lambda_2 e^{\lambda_2 t} = a_{21}(C_{11}e^{\lambda_1 t} + C_{21}e^{\lambda_2 t}) + a_{22}(C_{12}e^{\lambda_1 t} + C_{22}e^{\lambda_2 t}). \end{cases}$$

при $b_1(t) = b_2(t) \equiv 0$, для x_1 и x_2 имеют один вид:

$$\begin{cases} C_{11}(a_{11} - \lambda_1) + C_{12}a_{12} = 0 \\ C_{21}(a_{11} - \lambda_2) + C_{22}a_{12} = 0 \\ C_{12}(a_{22} - \lambda_1) + C_{11}a_{21} = 0 \\ C_{22}(a_{22} - \lambda_2) + C_{21}a_{21} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

где λ_1, λ_2 - корни характеристического уравнения

$$\begin{cases} C_{11}(a_{11} - \lambda_1) + C_{12}a_{12} = 0 \\ C_{12}(a_{22} - \lambda_1) + C_{11}a_{21} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

которые будем считать действительными и различными. Заметим, что коэффициенты в (10) имеют ясный алгебраический смысл: $(a_{11} + a_{22})$ -

след матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, а $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ - ее определитель.

В (9) постоянные $C_{11}, C_{21}, C_{12}, C_{22}$ не являются независимыми, поскольку x_1 и x_2 связаны уравнениями (5) [при $b_1(t) = b_2(t) = 0$]. Именно

Из этих соотношений получаем

Рассмотрим первое и третье уравнения из (11), то есть систему
Ее определитель

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda_1) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda_1) \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda_1)(a_{22} - \lambda_1) - a_{12}a_{21} =$$

$$C_{12} : C_{11} = (\lambda_1 - a_{11}) : a_{12} \quad (13)$$

$$= \lambda_1^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda_1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

$$\begin{cases} C_{21}(a_{11} - \lambda_2) + C_{22}a_{12} = 0 \\ C_{21}a_{21} + C_{22}(a_{22} - \lambda_2) = 0, \end{cases}$$

в силу того, что λ_1 - корень характеристического уравнения (10). Следовательно, одно уравнение в (12) является следствием другого, в данном случае они просто пропорциональны. Достаточно оставить одно из них, например,

$$C_{22} : C_{21} = (\lambda_2 - a_{11}) : a_{12} \quad (14)$$

$$\begin{cases} C_{11}(a_{11} - \lambda_1) + C_{12}a_{12} = 0, \\ C_{11} = C_1 a_{12}; \quad C_{12} = C_1(\lambda_1 - a_{11}) \\ C_{21} = C_2 a_{12}; \quad C_{22} = C_2(\lambda_2 - a_{11}). \end{cases} \quad (15)$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) = C_1 a_{12} e^{\lambda_1 t} + C_2 a_{12} e^{\lambda_2 t} \\ x_2 = \varphi_2(t) = C_1 (\lambda_1 - a_{11}) e^{\lambda_1 t} + C_2 (\lambda_2 - a_{11}) e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (16)$$

Аналогично из системы

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} \end{pmatrix}, \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_2 - a_{11} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

у которой определитель также нулевой, достаточно оставить одно,

$$\vec{x} = C_1 e^{\lambda_1 t} \vec{h}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \vec{h}_2. \quad (18)$$

скажем, первое

$$C_{21}(a_{11} - \lambda_2) + C_{22}a_{12} = 0,$$

откуда

По (13) и (14) можно, например, считать

По (9) и (15) имеем

Если ввести в рассмотрение векторы-столбцы
то (16) можно записать в виде

Выясним алгебраический смысл векторов $\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$. Вычислим

$$\begin{aligned} A \vec{h}_1 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} + a_{12}(\lambda_1 - a_{11}) \\ a_{12}a_{21} + a_{22}(\lambda_1 - a_{11}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{12} \\ \lambda_1 a_{22} - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{12} \\ \lambda_1^2 - a_{11}\lambda_1 - (\lambda_1^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda_1 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{12} \\ \lambda_1(\lambda_1 - a_{11}) + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{12} \\ \lambda_1(\lambda_1 - a_{11}) \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} \end{pmatrix} = \lambda_1 \vec{h}_1. \end{aligned}$$

Равенство $A \vec{h}_1 = \lambda_1 \vec{h}_1$ означает, что вектор-столбец $\vec{h}_1$ является

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad (19)$$

собственным вектором матрицы A, соответствующим собственному значению λ_1 .

Аналогично справедливо равенство $A \vec{h}_2 = \lambda_2 \vec{h}_2$ и $\vec{h}_2$ - собственный

вектор матрицы A , соответствующий собственному значению λ_2 .

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} > 0. \quad (20)$$

Этим полностью выясняется структура общего решения однородной линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в случае действительных различных корней характеристического

$$x_2 = \frac{1}{a_{12}} \left(\frac{dx_1}{dt} - a_{11}x_1 - b_1(t) \right). \quad (21)$$

$$x_1 = \frac{1}{a_{21}} \left(\frac{dx_2}{dt} - a_{22}x_2 - b_2(t) \right). \quad (22)$$

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_1 - x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + 2e^t \end{cases} \quad (23)$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 2 \frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt} = 2(2x_1 - x_2) - x_1 - 2e^t = 3x_1 - 2x_2 - 2e^t = 3x_1 + 2 \frac{dx_1}{dt} - 4x_1 - 2e^t,$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} - 2 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = -2e^t. \quad (24)$$

уравнения

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0,$$

то есть когда

В случае, когда левая часть (20) равна нулю или отрицательна, возникают более сложные формулы для общего решения системы (19). Можно сказать, что проще всего при решении систем (5) или (19) переходить к решению уравнения (6) или (7), а получив (при $a_{12} \neq 0$) общее решение x_1 уравнения (6), найти x_2 из первого уравнения (5) по формуле

Если $a_{12} = 0$, то обязательно $a_{21} \neq 0$ [иначе решение (5) тривиально] и надо найти x_2 из (7), а затем получить x_1 по формуле

Рассмотрим пример:
откуда

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

имеет корень $\lambda = 1$ кратности 2. Следовательно, общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} - 2 \frac{dx_1}{dt} + x_1 = 0$$

имеет общее решение

$$(C_1 + C_2 t)e^t ;$$

$$x_{1, \text{частное}} = e^{t^2} C;$$

$$\frac{dx_{1, \text{частное}}}{dt} = C(t^2 + 2t)e^t;$$

$$\frac{d^2 x_{1, \text{частное}}}{dt^2} = C(t^2 + 4t + 2)e^t;$$

$$\begin{cases} x_1 = (C_1 + C_2 t - t^2)e^t \\ x_2 = ((C_1 - C_2) + (C_2 + 2)t - t^2)e^t. \end{cases}$$

$$\frac{d^2 x_{1, \text{ч}}}{dt^2} - 2 \frac{dx_{1, \text{ч}}}{dt} + x_{1, \text{ч}} = C(t^2 + 4t + 2 - 2t^2 - 4t + t^2)e^t = 2Ce^t = -2e^t.$$

Следовательно, $C = -1$ и

$$x_{1, \text{частное}} = -t^2 e^t.$$

Общее решение д.у. (24) имеет вид

$$x_1 = (C_1 + C_2 t - t^2)e^t.$$

Так как из первого уравнения в (23)

$$x_2 = 2x_1 - \frac{dx_1}{dt},$$

то

$$x_2 = (2C_1 + 2C_2 t - 2t^2 - C_1 - C_2 t + t^2 - C_2 + 2t)e^t = ((C_1 - C_2) + (C_2 + 2)t - t^2)e^t.$$

Окончательно общее решение системы (23) есть

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

- 1. Составьте логическую схему базы знаний по теме курса.**

2. Решите самостоятельно следующие задачи:

Вариант 1

1. Найти и изобразить графически области, в которых выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt[3]{x^2}.$$

2. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{4t + 3x}{x},$$

удовлетворяющее начальному условию $x(1) = 4$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения и дать эскиз интегральных кривых

$$\frac{dx}{dt} - x = \frac{e^t}{t}.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{2x} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2.$$

5. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 3x = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$.

Вариант 2

1. Найти и изобразить графически области, в которых выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = 2 + \sqrt[3]{x - 2t}.$$

2. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t \ln \frac{x}{t}},$$

удовлетворяющее начальному условию $x(1) = e$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения и дать эскиз интегральных кривых

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{t}x = -\frac{1}{t^2}.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{1}{e^t+1} \frac{dx}{dt}.$$

5. Найти решение дифференциального уравнения

$$2 \frac{d^2x}{dt^2} - 5 \frac{dx}{dt} + 2x = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$, $x'(0) = -\frac{3}{2}$.

Вариант 3

1. Найти и изобразить графически области, в которых выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{x} - t}{t - 2}.$$

2. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{2t + x},$$

удовлетворяющее начальному условию $x(1) = -1$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения и дать эскиз интегральных кривых

$$\frac{dx}{dt} - 2tx = 2t^3.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1-t}{t} \frac{dx}{dt}.$$

5. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$.

Вариант 4

1. Найти и изобразить графически области, в которых выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x \ln t}{x - t}$$

2. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t + 3x}{t + 4x},$$

удовлетворяющее начальному условию $x(1) = 1$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения и дать эскиз интегральных кривых

$$\frac{dx}{dt} - \frac{x}{t} = t.$$

4. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt} - 1 \right) \operatorname{ctgt}.$$

5. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$, $x'(0) = -1$.

Вариант 5

1. Найти и изобразить графически области, в которых выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \frac{\sqrt{x^2 - t^2}}{t}.$$

2. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t+x}{t},$$

удовлетворяющее начальному условию $x(1) = 0$.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения и дать эскиз интегральных кривых

$$\frac{dx}{dt} - 3\frac{x}{t} = -t.$$

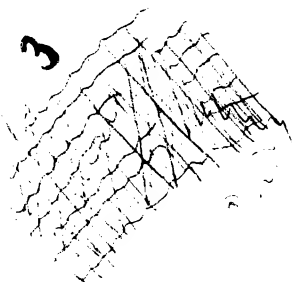
4. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

5. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 4x = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.



ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

1. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №1

Задание

Решить дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$txdt + (t + 1)dx = 0$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Шаг алгоритма	Конкретное соответствие задания шагу алгоритма
1	2	3
1	Записать уравнение в виде $p_1(t)p_2(x)dt + g_1(t)g_2(x)dx = 0$ и зафиксировать функции $p_1(t)$, $p_2(x)$, $g_1(t)$, $g_2(x)$	$txdt + (t + 1)dx = 0$ $p_1(t) = t$, $p_2(x) = x$, $g_1(t) = t + 1$, $g_2(x) = 1$.
2	Найти решения уравнений $g_1(t) = 0$ и $p_2(x) = 1$	$g_1(t) = 0 \Leftrightarrow t + 1 = 0 \Leftrightarrow t_0 = -1$, $p_2(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$.
3	Зафиксировать решения уравнения вида $t = t_0$ и $x = x_0$	$t = -1$ и $x = 0$ – решения исходного дифференциального уравнения
4	Разделить переменные в областях, где $g_1(t)p_2(x) \neq 0$, записав уравнение в виде $\frac{p_1(t)}{g_1(t)}dt + \frac{g_2(x)}{p_2(x)}dx = 0$	$\frac{t}{t+1}dt + \frac{1}{x}dx = 0$ при $(t+1)x \neq 0$.
5	Найти первообразные $P(t)$ для $\frac{p_1(t)}{g_1(t)}$ и $Q(x)$ для $\frac{g_2(x)}{p_2(x)}$ с помощью неопределенного интегрирования	$P(t) = \int \frac{t}{t+1}dt = \int \frac{(t+1)-1}{t+1}dt =$ $= \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = \int 1dt - \int \frac{1}{t+1}dt = t -$ $- \int \frac{d(t+1)}{t+1} = t - \ln t+1 + C_1$ $Q(x) = \int \frac{1}{x}dx = \ln x + C_2$

1	2	3
6	Опустив C_1 и C_2 , записать общий интеграл уравнения в виде $\varphi(t, x) = P(t) + Q(x) + C$ в областях, где $g_1(t) p_2(x) \neq 0$	$\varphi(t, x) = t + \ln t+1 + \ln x = C$ в областях, где $(t+1)x \neq 0$.
7	Выяснить, не входят ли в общий интеграл при каких-то значениях C ранее найденные решения вида $t = t_0$ и $x = x_0$	Так как $\ln t+1 $ и $\ln x $ не определены при $t = -1$ и $x = 0$ соответственно, то решения $t = -1$ и $x = 0$ ни при каких C не входят в общий интеграл $\varphi(t, x) = C$, найденный в пункте 6
8	Выписать все решения исходного дифференциального уравнения	Множество всех решений дифференциального уравнения $txdt + (t+1)dx = 0$ есть $\{t + \ln t+1 + \ln x = C$ при $(t+1)x \neq 0$; $t = -1; x = 0\}$

Решите самостоятельно дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

1.1. $2tx^2dt + (t^2 - 1)dx = 0$.

1.2. $\sqrt{x^2 + 1} dt - tx dx = 0$.

1.3. $3\sqrt[3]{x^2} dt - \frac{dx}{\sqrt{x^2}} = 0$ | $\sqrt{x^2}$

$3 \frac{dt}{\sqrt{x^2}} - \frac{dx}{\sqrt{x^2}} = 0$

$x^{\frac{1}{2}} 3 dt - dx$

$$1.4. (x - x^2)dt + tdx = 0. \quad f(x, t) = x$$

$$\frac{(x - x^2) \cdot x}{x} = \frac{(x - x^2) \cdot x}{x}$$

$$p_1(t) = (x - x^2), \quad p_2 = (x^2), \quad q_1(t) = t, \quad q_2(x) = x$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - x} \quad \begin{cases} u = x^2 - x \\ du = (2x - 1) dx \\ v = x \end{cases}$$

$$1.5. -t(x^2 + 2x)dt + dx = 0.$$

2. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №2

Задание

Решить однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t + 2x}{t}$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Шаг алгоритма	Конкретное соответствие задания шагу алгоритма
1	2	3
1	Записать уравнение в виде $\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right)$, зафиксировать функцию $f(u)$	$\frac{dx}{dt} = 1 + 2\frac{x}{t}$, $f(u) = 1 + 2u$.

2	Сделать в уравнении замену $x = t \cdot u$ и переписать его в виде $t \frac{du}{dt} = f(u) - u$	$t \frac{du}{dt} = 1 + 2u - u = u + 1.$
3	Решить уравнение $f(u) - u = 0$ и для каждого его решения u_0 зафиксировать решение исходного дифференциального уравнения вида $x = u_0 \cdot t$	$u + 1 = 0 \Leftrightarrow u_0 = -1 \Leftrightarrow x = -t$ – решение исходного дифференциального уравнения.
4	В областях $t(f(u) - u) \neq 0$ привести уравнение $t \frac{du}{dt} = f(u) - u$ к виду уравнения с разделенными переменными $\frac{1}{t} dt + \frac{1}{-f(u) + u} du = 0$	$\frac{1}{t} dt - \frac{1}{u+1} du = 0 \text{ при } t(u+1) \neq 0.$
5	Найти первообразную $\Phi(u)$ для функции $\frac{1}{-f(u) + u}$ с помощью неопределенного интегрирования	$\Phi(u) = \int -\frac{1}{u+1} du = -\int \frac{d(u+1)}{u+1} = -\ln u+1 + C'$
6	Записать общий интеграл дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right)$ в виде $\ln Ct + \Phi\left(\frac{x}{t}\right) = 0$, опустив C'	Общий интеграл дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = 1 + 2\frac{x}{t}$ есть $\ln Ct - \ln\left \frac{x}{t} + 1\right = 0.$
7	Выяснить, не входят ли в общий интеграл при каких-то значениях C решения вида $x = u_0 \cdot t$, найденные ранее	Так как $\ln\left \frac{x}{t} + 1\right $ не определен при $x = -t$, это решение не входит в общий интеграл.
8	Выписать все решения исходного дифференциального уравнения	Множество всех решений дифференциального уравнения $\frac{dx}{dt} = \frac{t+2x}{t}$ есть $\left\{ \ln Ct - \ln\left \frac{x}{t} + 1\right = 0 \right.$ при $Ct\left(\frac{x}{t} + 1\right) \neq 0; x = -t\}$.

Решите самостоятельно однородные дифференциальные уравнения первого порядка:

2.1. $\frac{dx}{dt} = \frac{x-t}{x+t}$; $u = \frac{x}{t}$; $t = \frac{x}{u}$; $dt = \frac{u dx - x du}{u^2}$

1) $(x+t) dx = (x-t) dt$; t $5) (u^3 + u^4) dx = (u-1)(u^2 x - x du)$
 $1) \left(\frac{x}{t} + 1\right) dx = \left(\frac{x}{t} - 1\right) dt$ $6) u^3 dx + u^4 dx = u^2 dx - u du - u^2 x + x du$
 $2) \left(\frac{x}{t} + 1\right) dx = \left(\frac{x}{t} - 1\right) dt$ $7) u^3 dx + u^4 dx = x du - x du - u^2 x + x du$
 $3) (u+1) dx = (u-1) dt$ $8) u(u^2+1) dx = x(1-u) du$ $| x u (u^2+1)$
 $4) (u+1) dx = (u-1) u^2 dx - x du$ $9) \frac{dx}{x} = \frac{(1-u) du}{u(u^2+1)}$

10) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
 $11) \int \frac{(1-u)}{u(u^2+1)} dx = \left[\frac{1}{2} \ln|u^2+1| - \frac{1}{2} \ln|u| \right] + C$
 $2.2. \frac{dx}{dt} = \frac{x - te^t}{t}$

$\cdot du = u^4 + u^3 - \frac{1}{2} u^5 - \frac{1}{2} u^4 - \left(3u^3 + 2u^2 - \frac{3}{2} u^4 - u^3 \right) du =$
 $= \frac{1}{2} u^5 + \frac{1}{2} u^4 + u^3 - \left(-\frac{3}{2} u^4 + 2u^3 + 2u^2 \right) du = \frac{1}{2} u^5 +$

$+ \frac{1}{2} u^4 + u^3 - \left(-\frac{3}{2} \cdot \frac{u^5}{5} + 2 \cdot \frac{u^4}{4} + 2 \cdot \frac{u^3}{3} \right) =$
 $= -\frac{1}{2} u^5 + \frac{1}{2} u^4 + u^3 + \frac{3u^5}{10} - \frac{1}{2} u^4 - \frac{2}{3} u^3 = -\frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{3} u^3$

2.3. $\frac{dx}{dt} = \frac{2tx}{t^2 + x^2}$

$-\frac{1}{5} \left(\frac{x}{t} \right)^5 - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{t} \right)^3 = 0$

2.4. $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{tx - t^2}$

$$2.5. \frac{dx}{dt} = \frac{x + t \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{t}}{t}.$$

3. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №3

Задание

Решить дифференциальное уравнение Бернулли

$$\frac{dx}{dt} + 2x = e^t x^2.$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Шаг алгоритма	Конкретное соответствие задания шагу алгоритма
1	2	3
1	Записать уравнение в виде $\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)x^\alpha$ и зафиксировать функции $P(t)$, $Q(t)$ и число $\alpha \neq 1$	$\frac{dx}{dt} + 2x = e^t x^2$ $P(t) = 2, Q(t) = e^t, \alpha = 2.$
2	Сделать в уравнении замену $x = u \cdot v$ и записать его в виде $v \frac{du}{dt} + u \left(\frac{dv}{dt} + P(t)v \right) = Q(t)(uv)^\alpha$	$x = u \cdot v \Rightarrow v \frac{du}{dt} + u \left(\frac{dv}{dt} + 2v \right) =$ $= e^t (u \cdot v)^2.$
3	Записать уравнение для v $\frac{dv}{dt} + P(t)v = 0$	$\frac{dv}{dt} + 2v = 0$
4	Разделив переменные в уравнении для v , решить его, взяв постоянную в общем решении, равную нулю	$2dt + \frac{1}{v} dv = 0 \Leftrightarrow \int 2dt + \int \frac{1}{v} dv =$ $= 2t + \ln v = 0 \Rightarrow v = e^{-2t}$

1	2	3
5	Записать уравнение для u в виде $\frac{du}{dt} = Q(t) (uv)^{\alpha} \cdot v^{-1}$ и провести преобразования в правой его части	$\frac{du}{dt} = e^t (u e^{-2t})^2 e^{2t} = u^2 e^{-t}$
6	Разделить переменные в уравнении для u	$e^{-t} dt - \frac{1}{u^2} du = 0$
7	В случае $\alpha > 0$ зафиксировать решение $x = 0$ исходного уравнения	$x = 0$ – решение уравнения $\frac{dx}{dt} + 2x = e^t x^2$
8	Решить уравнение с разделенными переменными t, u	$e^{-t} dt - \frac{1}{u^2} du = 0 \Rightarrow \int e^{-t} dt - \int \frac{1}{u^2} du =$ $= -e^{-t} + \frac{1}{u} = C$
9	Проведя алгебраические преобразования, найти явное выражение для u	$\frac{1}{u} = e^{-t} + C = \frac{1 + Ce^t}{e^t} \Rightarrow u = \frac{e^t}{1 + Ce^t}$
10	Найти общее решение для x , перемножив найденные выражения для u, v	$x = u \cdot v = \frac{e^t}{1 + Ce^t} e^{-2t} = \frac{e^{-t}}{1 + Ce^t} =$ $= \varphi(t, x)$
11	Выписать все решения исходного дифференциального уравнения	Множество всех решений уравнения $\frac{dx}{dt} + 2x = e^t x^2$ есть $\left\{ \frac{e^{-t}}{1 + Ce^t}; 0 \right\}$

Решите самостоятельно дифференциальные уравнения Бернулли:

3.1.
$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + \frac{t}{x^2}.$$

$$3.2. \frac{dx}{dt} = x \operatorname{tg} t + x^4 \cos t.$$

$$3.3. \frac{dx}{dt} = -2 \frac{x}{t} - t^4 e^t x^3.$$

$$3.4. \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{x}{t} + \frac{tx}{2(t^2 - 1)}.$$

$$3.5. \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t} + 2x^2 \ln t.$$

4. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №4

Задание

Решить дифференциальное уравнение с полным дифференциалом

$$2txdt + (t^2 - x^2)dx = 0.$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Шаг алгоритма	Конкретное соответствие задания шагу алгоритма
1	2	3
1	Записать уравнение в виде $P(t, x)dt + Q(t, x)dx = 0$ и зафиксировать функции $P(t, x)$ и $Q(t, x)$	$2txdt + (t^2 - x^2)dx = 0$ $P(t, x) = 2tx; Q(t, x) = t^2 - x^2$
2	Проверить выполнение условия $P'_x(t, x) = Q'_t(t, x)$, что гарантирует принадлежность дифференциального уравнения классу уравнений с полным дифференциалом	$P'_x(t, x) = (2tx)_x' = 2t; Q'_t(t, x) = (t^2 - x^2)_t' = 2t \Rightarrow P'_x(t, x) = Q'_t(t, x) = 2t \Rightarrow$ уравнение $2txdt + (t^2 - x^2)dx = 0$ – дифференциальное уравнение с полным дифференциалом
3	Найти $u(t, x)$ как первообразную от $P(t, x)$ по переменной t , считая постоянной функцией от x $u(t, x) = \int P(t, x) dt + C(x)$	$u(t, x) = \int 2tx dt = t^2x + C'(x)$
4	Найти производную от найденной функции $u(t, x)$ по переменной x и приравнять ее $Q(t, x)$ $u'_x(t, x) = (\int P(t, x) dt)_x' + C'(x) = Q(t, x)$	$u'_x(t, x) = (t^2x + C(x))_x' = t^2 + C'(x)Q(t, x) \Rightarrow t^2 + C'(x) = t^2 - x^2$
5	Найти из полученного равенства $C'(x) = Q(t, x) - (\int P(t, x) dt)_x'$	$C'(x) = (t^2 - x^2) - t^2 = -x^2$

1	2	3
6	Найти $C(x)$ как первообразную от $C'(x)$, взяв постоянную в неопределенном интеграле равной нулю $C(x) = \int C'(x) dx + 0$	$C(x) = \int -x^2 dx + 0 = -\frac{x^3}{3}$
7	Подставить найденную функцию $C(x)$ в выражение $u(t, x)$ из третьего шага алгоритма $u(t, x) = \int P(t, x) dt + C(x)$	$u(t, x) = t^2 x - \frac{x^3}{3}$
8	Записать общий интеграл уравнения $P(t, x)dt + Q(t, x)dx = 0$ в виде $u(t, x) = C$	Общий интеграл уравнения $2txdt + (t^2 - x^2)dx = 0$ есть $t^2 x - \frac{x^3}{3} = C$

Решите самостоятельно дифференциальные уравнения с полным дифференциалом:

4.1. $(2 - 9tx^2)tdt + (4x^2 - 6t^3)xdx = 0.$

4.2. $e^x dt - (2x + te^x)dx = 0.$

4.3. $\frac{x}{t} dt + (x^3 + \ln t)dx = 0.$

$$4.4. (3\frac{t^2}{x^2} + 1)dt - (2\frac{t^3}{x^3} + \frac{5}{x^2})dx = 0.$$

$$4.5. (1 + x^2\sin 2t)dt - 2x\cos^2 t dx = 0.$$

5. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №5

Задание

Решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и квазимногочленом в правой части

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 3x = t^2e^t.$$

Решение

Заполните таблицу, подобрав к каждому шагу алгоритма конкретное соответствие из задания.

№ п/п	Шаг алгоритма	Конкретное соответствие задания шагу алгоритма
1	2	3
1	Записать уравнение в виде $a_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x =$ $= e^{\mu t} ((A_0 t^k + A_1 t^{k-1} + \dots + A_k) \cos vt + (B_0 t^l + B_1 t^{l-1} + \dots + B_l) \sin vt)$ и зафиксировать значения постоянных $a_0, a_1, a_2, \mu, v, k, l, A_0, A_1, \dots, A_k, B_0, B_1, \dots, B_l$	$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} - 3x = t^2 e^t$ $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = -3, \mu = 1, v = 0, k = 2, l = 0, A_0 = 1, A_1 = 0, A_2 = 0, B_0 = 0$
2	Записать характеристическое уравнение $a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$	Характеристическое уравнение есть $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$
3	Записать корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0};$ $\lambda_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0},$ если дискриминант $D = a_1^2 - 4a_0 a_2 \geq 0$ и числа $\alpha = -\frac{a_1}{2a_0}, \beta = \frac{\sqrt{4a_0 a_2 - a_1^2}}{2a_0},$ если дискриминант $D = a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0$	$\lambda_1 = \frac{-2 - \sqrt{4 - 4 \cdot 1(-3)}}{2} = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2} =$ $= \frac{-2 - 4}{2} = -3,$ $\lambda_2 = \frac{-2 + \sqrt{4 - 4 \cdot 1(-3)}}{2} = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2} =$ $= \frac{-2 + 4}{2} = 1,$ так как дискриминант $D = 4 - 4 \cdot 1(-3) = 16 > 0$
4	Найти число $N = \max \{k; l\}$	$N = \max \{2; 0\} = 2$
5	Найти число s по формуле $s = 0$, если $(a_0(\mu^2 - v^2) + a_1\mu + a_2)^2 + v^2(2a_0\mu + a_1)^2 > 0$, $s = 1$, если $v = 0, \mu = \lambda_1$ или $\mu = \lambda_2$ и $D = a_1^2 - 4a_0 a_2 > 0$. $s = 1$, если $v > 0$ и $(a_0(\mu^2 - v^2) + a_1\mu + a_2)^2 +$	Число $(a_0(\mu^2 - v^2) + a_1\mu + a_2)^2 + v^2(2a_0\mu + a_1)^2 = (1(1^2 - 0^2) + 2 \cdot 1 - 3)^2 + 0^2(2 \cdot 1 \cdot 1 + 2)^2 = (1 + 2 - 3)^2 + 0 \cdot 4^2 = 0$, следовательно, $s = 1$

1	2	3
	$+v^2(2a_0\mu + a_1)^2 = 0,$ $s = 2,$ если $v = 0, D = a_1^2 -$ $-4a_0a_2 = 0,$ $\mu = -\frac{a_1}{2a_0},$ для чего подсчи- тать число $(a_0(\mu^2 - v^2) + a_1\mu + a_2)^2 +$ $+v^2(2a_0\mu + a_1)^2$	
6	Записать частное решение $\Psi^*(t) = e^{\mu t} t^s ((C_0 t^N + C_1 t^{N-1} +$ $+ \dots + C_N) \cos vt + (D_0 t^N +$ $+ D_1 t^{N-1} + \dots + D_N) \sin vt)$ с неопределёнными коэффи- циентами $C_0, C_1, \dots, C_N, D_0,$ $D_1, \dots, D_N,$ причем $D_0 = D_1 =$ $= \dots = D_N = 0,$ если $v = 0$	$\Psi^*(t) = e^t (C_0 t^2 + C_1 t + C_2) = e^t (C_0 t^3 +$ $+ C_1 t^2 + C_2 t)$
7	Вычислить $\Psi^{**}(t), \Psi^{***}(t)$	$\Psi^{**}(t) = (e^t (C_0 t^3 + C_1 t^2 + C_2 t))' = e^t (C_0 t^3 +$ $+ (3C_0 + C_1)t^2 + (2C_1 + C_2)t + C_2),$ $\Psi^{***}(t) = (e^t (C_0 t^3 + (3C_0 + C_1)t^2 + (2C_1 +$ $+ C_2)t + C_2))' = e^t (C_0 t^3 + (6C_0 + C_1)t^2 +$ $+ (6C_0 + 4C_1 + C_2)t + (2C_1 + 2C_2)).$
8	Вычислить $a_0 \Psi^{***}(t) + a_1 \Psi^{**}(t) + a_2 \Psi^*(t),$ приведя подобные члены	$\Psi^{***}(t) + 2\Psi^{**}(t) - 3\Psi^*(t) = e^t ((C_0 + 2C_0 -$ $- 3C_0)t^3 + (6C_0 + C_1 + 6C_0 + 2C_1 - 3C_1)t^2 +$ $+ (6C_0 + 4C_1 + C_2 + 4C_1 + 2C_2 - 3C_2)t +$ $+ (2C_1 + 2C_2 + 2C_2)) = e^t (12C_0 t^2 + (6C_0 +$ $+ 8C_1)t + (2C_1 + 4C_2)).$
9	Записать систему линейных уравнений для $C_0, C_1, \dots,$ $C_N, D_0, D_1, \dots, D_N,$ прирав- няя коэффициенты при по- добных членах $a_0 \Psi^{***}(t) + a_1 \Psi^{**}(t) + a_2 \Psi^*(t)$ и $e^{\mu t} ((A_0 t^k + A_1 t^{k-1} + \dots +$ $+ A_k) \cos vt + (B_0 t^l + B_1 t^{l-1} +$ $+ \dots + B_l) \sin vt)$	$\begin{cases} 12C_0 = 1 \\ 6C_0 + 8C_1 = 0 \\ 2C_1 + 4C_2 = 0 \end{cases}$
10	Найти $C_0, C_1, \dots, C_N, D_0, D_1,$ $\dots, D_N,$ решив систему из п.9, и получить $\Psi^*(t)$ по п.6	$C_0 = \frac{1}{12}; C_1 = -\frac{1}{16}; C_2 = \frac{1}{32} \Rightarrow$

1	2	3
		$\Psi^*(t) = e^t \left(\frac{t^3}{12} - \frac{t^2}{16} + \frac{t}{32} \right).$
11	Записать общее решение исходного дифференциального уравнения в виде $\varphi(t) = \Psi^*(t) + \tilde{C}_1 e^{\lambda_1 t} + \tilde{C}_2 e^{\lambda_2 t}$ при $D = a_1^2 - 4a_0a_2 > 0$ (λ_1, λ_2 – из п.3)), $\varphi(t) = \Psi^*(t) + (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t) e^{\lambda_1 t}$ при $D = 0$ и $\lambda_1 = \lambda_2$, $\varphi(t) = \Psi^*(t) + (\tilde{C}_1 \cos \beta t + \tilde{C}_2 \sin \beta t) e^{\alpha t}$ при $D < 0$ (α, β – из п.3)	Так как $D = a_1^2 - 4a_0a_1 = 16 > 0$ и $\lambda_1 = -3 \neq \lambda_2 = 1$, то общее решение уравнения $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - 3x = t^2 e^t$ есть $\varphi(t) = e^t \left(\frac{t^3}{12} - \frac{t^2}{16} + \frac{t}{32} \right) + \tilde{C}_1 e^{-3t} + \tilde{C}_2 e^t,$ где $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ – произвольные постоянные

Решите самостоятельно линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и квазимногочленом в правой части:

5.1. $\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - 4x = e^{-4t}.$

5.2. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x = 6te^t.$

$$5.3. \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = 3te^t.$$

$$5.4. \frac{d^2x}{dt^2} - 5 \frac{dx}{dt} = 3t^2.$$

$$5.5. \frac{d^2x}{dt^2} + x = tsint.$$

ФАЙЛ МАТЕРИАЛОВ

Примеры отработки решения задач

Пример 1. Найти и изобразить графически область, в которой выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x+t}{\sqrt{1-(t+x)^2}}.$$

Решение. Единственной областью, в которой непрерывна функция

$f(t, x) = \frac{x+t}{\sqrt{1-(t+x)^2}}$, является область на плоскости (t, x) , для точек которой

выполнено условие

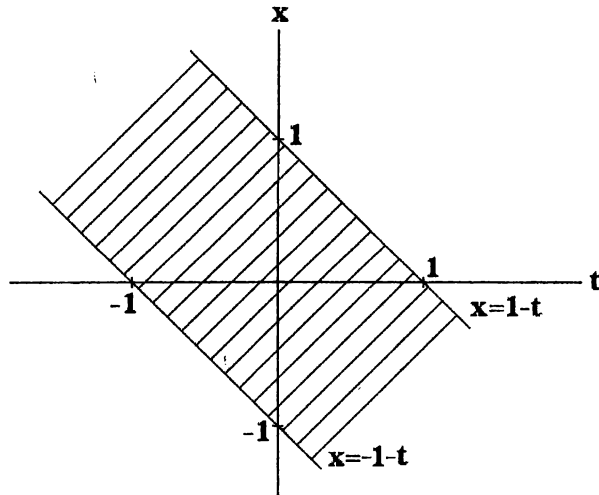
$$-1 < t+x < +1.$$

В этой же области непрерывна и производная $f'_x(t, x)$, равная

$$\frac{1}{\sqrt{1-(t+x)^2}} + \frac{(x+t)^2}{(1-(t+x)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Область точек (t, x) , для которых $-1 < t+x < +1$, есть полоса между прямыми

$$x = 1 - t \text{ и } x = -1 - t \text{ для } t \in (-\infty; +\infty)$$



Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{x}{t} - 1} + 1,$$

удовлетворяющее начальному условию $x(t) = 1$.

Решение. Так как правая часть уравнения имеет вид $f(\frac{x}{t})$, то уравнение является однородным д.у. первого порядка.

Замена $x = t \cdot u$ приводит его к виду

$$t \frac{du}{dt} = \sqrt{u-1} + 1 - u.$$

Очевидно, что функция

$$f(u) - u = \sqrt{u-1} - (u-1)$$

обращается в нуль при $u = 1$. Следовательно, $u \equiv 1$ или $x = t$ является решением исходного уравнения.

В области $x > t$, где выполнены условия теоремы существования и единственности для исходного уравнения, поскольку $f(t, x) = \sqrt{\frac{x}{t} - 1} + 1$

и $f'_x(t, x) = \frac{1}{2t\sqrt{\frac{x}{t}-1}}$ в этой области непрерывны, д.у. для функции u является уравнением с разделяющимися переменными и легко приводится к виду

$$\frac{1}{t} dt + \frac{1}{(u-1) - \sqrt{u-1}} du = 0.$$

Общий интеграл этого д.у. есть

$$\ln|t| + \int \frac{du}{(u-1) - \sqrt{u-1}} = \ln|C|, \quad C \neq 0.$$

Вычислим интеграл

$$\int \frac{du}{(u-1) - \sqrt{u-1}} \stackrel{(u-1=y^2)}{=} \int \frac{2y dy}{y^2 - y} = 2 \int \frac{dy}{y-1} = 2 \ln|y-1| + C' = \ln(\sqrt{u-1} - 1)^2 + C'$$

Отсюда

$$\ln|t| + \ln\left(\sqrt{\frac{x}{t}-1} - 1\right)^2 = \ln|C|$$

или

$$\ln(\sqrt{x-t} - \sqrt{t})^2 = \ln|C|,$$

откуда

$$\sqrt{x-t} - \sqrt{t} = C_1$$

(здесь $C_1^2 = |C| \neq 0$). Это общее решение в области $x > t$, не содержащей точку $(1, 1)$. Поэтому начальному условию удовлетворяет лишь решение $x = t$.

Пример 3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} - \frac{2}{t}x = 2t^3$$

и дать эскиз интегральных кривых.

Решение. Данное уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = Q(t)x^\alpha,$$

где $P(t) = -\frac{2}{t}$, $Q(t) = 2t^3$, $\alpha = 0$, и является линейным уравнением первого порядка (уравнение Бернулли при $\alpha = 0$). Сделав замену, получаем для v дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dt} + P(t)v = 0.$$

В данном конкретном случае

$$\frac{dv}{dt} + \frac{2}{t}v = 0.$$

или, после разделения переменных (деления на v и умножения на dt),

$$-\frac{2}{t}dt + \frac{1}{v}dv = 0,$$

откуда

$$\int -\frac{2}{t}dt + \int \frac{1}{v}dv = -\ln t^2 + \ln |v| = C'.$$

Полагая $C' = 0$ (требуется найти какое-то решение д.у. для v), получим $v = t^2$.

Для u получаем уравнение

$$v \frac{du}{dt} = Q(t),$$

в данном случае

$$t^2 \frac{du}{dt} = 2t^3$$

или

$$\frac{du}{dt} = 2t$$

($t \neq 0$, что видно из исходного д.у.). Имеем

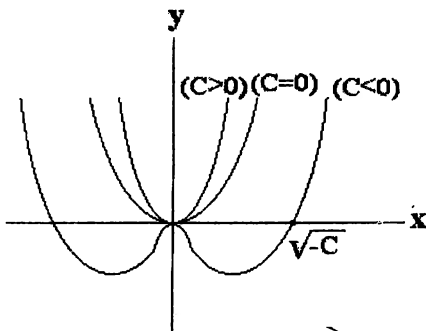
$$u = \int 2t dt = t^2 + C.$$

Окончательно общее решение [в областях $t > 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$ или $t < 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$] есть

$$x = u \cdot v = (t^2 + C)t^2 = Ct^2 + t^4.$$

При $C = 0$ имеем $x = t^4$, при $C > 0$, очевидно, $x > t^4$. При $C < 0$ $x < 0$ для $0 < |t| < \sqrt{-C}$ и $x > 0$ при $|t| > \sqrt{-C}$.

Таким образом, эскиз интегральных кривых имеет вид



Пример 4. Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{t^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2,$$

допускающее понижение порядка.

Решение. Замена

$$y = \frac{dx}{dt}$$

приводит к д.у. первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y^2}{t^2}.$$

Очевидно, что $y = 0$ - решение этого д.у., откуда $\frac{dx}{du} = 0$ и $x = C$ - решение исходного д.у. Разделяя переменные в уравнении для y (уже при $y \neq 0$), получаем

$$\frac{1}{t^2} dt - \frac{1}{y^2} dy = 0,$$

откуда

$$\int \frac{1}{t^2} dt - \int \frac{1}{t^2} dy = C_1$$

или

$$-\frac{1}{t} + \frac{1}{y} = C_1.$$

Для $C_1 = 0$ имеем $y = t$ или $\frac{dx}{dt} = t$ и $x = \frac{t^2}{2} + C_2$.

Для $C_1 \neq 0$ (и $t \cdot y \neq 0$)

$$y = \frac{dx}{dt} = \frac{t}{C_1 t + 1},$$

откуда

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{t}{C_1 t + 1} dt + C_2 = \int \frac{\left(t + \frac{1}{C_1}\right) - \frac{1}{C_1}}{C_1 t + 1} dt + C_2 = \frac{1}{C_1} \int dt - \frac{1}{C_1} \int \frac{dt}{C_1 t + 1} + C_2 = \\ &= \frac{t}{C_1} - \frac{1}{C_1^2} \ln|C_1 t + 1| + C_2. \end{aligned}$$

Окончательно множество решений исходного д.у. есть

$$\{x = C; x = \frac{t^2}{2} + C_2; x = \frac{t}{C_1} - \frac{1}{C_1^2} \ln|C_1 t + 1| + C_2\}.$$

Пример 5. Найти решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 4 \frac{dx}{dt} + 5x = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Решение. Данное уравнение является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Решаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Поскольку дискриминант $D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0$, то уравнение не имеет корней (действительных) и надо вычислить числа

$$\alpha = -\frac{a_1}{2a_0} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2 \text{ и } \beta = \frac{\sqrt{-D}}{2a_0} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1.$$

Следовательно, общее решение, записываемое в виде

$$\varphi(t) = (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) e^{\alpha t},$$

принимает вид

$\alpha = 2$
 $\beta = 1$

$$\varphi(t) = (C_1 \cdot \cos t + C_2 \cdot \sin t)e^{2t}.$$

Очевидно, что

$$\varphi'(t) = ((2C_1 + C_2) \cos t + (-C_1 + 2C_2) \sin t)e^{2t}.$$

Условия $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ приводят к алгебраической линейной системе уравнений относительно C_1 , C_2

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \\ (2C_1 + C_2) \cdot 1 + (-C_1 + 2C_2) \cdot 0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ 2C_1 + C_2 = 1, \end{cases}$$

откуда $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. Окончательно решением задачи является функция

$$x = e^{2t} \sin t.$$

